A. Kirillov

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES REPRÉSEN-TATIONS

Éditions Mir Moscou

A. KIRILLOV

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

TRADUIT DU RUSSE
par A. SOSSINSKY

На французском языке

Nombreuses inexactitudes dans la traduction française : par exemple,
Gölder pour Hölder, Shur pour Schur, Görding pour Gårding, A. Weyl pour A. Weil,
différenciable pour différentiable, moyen invariant pour moyenne invariante,
simplectique pour symplectique

PRÉFACE

Pendant plusieurs années, l'auteur de ce livre a professé à l'Université de Moscou des cours spéciaux et dirigé un séminaire consacrés à la théorie des représentations des groupes.

La majorité des personnes qui assistaient à ces cours et participaient aux séminaires étaient des étudiants des premières années de l'Université (ainsi que quelques écoliers et boursiers à thèses particulièrement doués).

La composition du séminaire se renouvelait constamment. Ses nouveaux participants, pas encore accablés par un poids excessif de connaissances, mais prêts à apprendre des choses nouvelles et résoudre de nombreux problèmes, s'y intégraient progressivement.

Pour chaque nouveau groupe d'étudiants, il était alors nécessaire de procéder à une sorte de « liquidation d'analphabétisme », concernant aussi bien les domaines des mathématiques indispensables pour travailler en théorie des représentations, que les fondements mêmes de cette théorie.

Assez rapidement, l'auteur a eu l'idée de se remplacer par un livre, qui ne serait pas, d'une part, trop volumineux (pour ne pas faire peur aux lecteurs) et, d'autre part, contiendrait tous les renseignements nécessaires.

Pour diverses raisons, la réalisation de cette idée demanda beaucoup plus de temps qu'il ne semblait nécessaire au début. Néanmoins, grâce au soutien moral de mes amis et de mon maître, I. M. Gelfand, le livre fut en fin de compte terminé. L'auteur s'excuse auprès des lecteurs du fait que le livre est plus gros qu'il ne devrait être et contient seulement une partie de ce qu'il aurait dû contenir.

La première partie du livre (§§ 1-6) n'est pas liée directement à la théorie des représentations. Cette partie expose les connaissances nécessaires qui se rapportent à d'autres domaines des mathématiques — surtout celles qui ne font pas partie des programmes obligatoires des premières années de l'Université en U.R.S.S. Le lecteur qui croit posséder ces connaissances peut aborder directement la deuxième partie (§§ 7-15). Celle-ci expose les notions et les méthodes fondamentales de la théorie des représentations. Dans la troisième partie (§§ 16-19), les constructions et les théorèmes généraux de la deuxième partie sont illustrés par des exemples concrets.

La note historique à la fin du livre reflète le point de vue de l'auteur sur le développement de la théorie des représentations et ne prétend pas jouer le rôle d'un manuel d'histoire des mathématiques. La conclusion de cette note décrit l'état actuel de la théorie des représentations et donne les références bibliographiques correspondantes.

Une particularité de ce livre, qui a permis de limiter considérablement son volume, est l'inclusion d'un grand nombre de problèmes. Quoique tous ces problèmes et les indications correspondantes sont imprimés en petits caractères, il ne faut pas les omettre, car on s'en sert d'une manière essentielle dans le texte. En particulier, la majorité des démonstrations sont données en forme de cycles de problèmes liés entre eux. Presque tous les problèmes sont munis d'indications qui, en général, permettent de retrouver la démonstration sans difficulté. Il est néanmoins utile d'essayer de résoudre le problème directement et de s'adresser à l'indication seulement en cas d'échec.

Notons quelques particularités relatives au choix des matières traitées. Le livre touche très peu à la théorie des représentations de dimension finie des algèbres de Lie et des groupes semi-simples. En effet, il existe en russe un nombre suffisant de bons exposés de cette branche de la théorie des représentations (voir [47], [48], [54], [36]) et l'auteur ne voulait pas les répéter.

Le rôle de la théorie des représentations des groupes dans la théorie des fonctions spéciales n'est aucunement reflété dans le texte. Une bonne introduction à ce domaine peut être obtenue en lisant l'ouvrage de N.Y. Vilenkine [55].

L'auteur ne s'est pas proposé de donner une description des nombreuses applications de la théorie des représentations à la physique théorique. A l'heure actuelle, il existe un grand nombre de travaux consacrés à ces applications (voir [3], [39], [29]).

Une grande partie du livre est consacrée à la méthode des orbites que l'on ne rencontre pas encore dans les manuels, mais qui, par sa simplicité et par son évidence, se rapporte sans aucun doute aux fondements de la théorie des représentations. Le caractère plutôt inachevé du § 15 (consacré à la méthode des orbites) s'explique par l'état actuel des choses dans ce domaine. Beaucoup de théorèmes importants ne sont démontrés que dans des cas particuliers ou existent seulement sous forme d'hypothèses.

De nombreux mathématiciens en Union Soviétique et à l'étranger travaillent aujourd'hui dans cette direction. Sans aucun doute, nos connaissances sur les relations entre les orbites et les représentations seront beaucoup plus complètes dans quelques années. L'auteur espère que certains lecteurs de ce livre apporteront leur contribution au développement de la méthode des orbites.

A. Kirillov

PREMIÈRE PARTIE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

---

§ 1. ENSEMBLES, CATÉGORIES, TOPOLOGIE

1.1. Ensembles.

Pour lire ce livre, il suffit d'une certaine familiarité avec la partie de la théorie des ensembles que l'on enseigne dans le cours universitaire en U.R.S.S. (Voir, par exemple, les premiers chapitres des manuels de A. N. Kolmogorov et S. V. Fomine [40] ou de G. E. Chilov [11]). Des renseignements plus approfondis (y compris une définition exacte du concept d'ensemble) peuvent être trouvés dans les livres de A. Fraankel et I. Bar-Hillel [17] et de P. Cohen [12].

Pour faciliter la lecture, fixons ici quelques notations et rappelons certaines définitions.

$\varnothing$ — ensemble vide;

$x \in X$ — l'élément x appartient à l'ensemble X;

$x \notin X$ — l'élément x n'appartient pas à l'ensemble X;

$X \subset Y$ — l'ensemble X est inclus dans l'ensemble Y (et, au cas échéant, coïncide avec lui);

$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ — la réunion du système d'ensembles X_α, indexés par les éléments de l'ensemble A; si l'ensemble A est un ensemble fini, on emploie également une notation telle que $X \cup Y \cup \ldots \cup Z$;

$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ — l'intersection du système d'ensembles X_α;

$X \setminus Y$ — le complément de l'ensemble Y relativement à l'ensemble X;

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — le produit des ensembles X_α, c'est-à-dire la famille des collections $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, où $x_\alpha \in X_\alpha$;

$f: X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ — l'application f de l'ensemble X dans l'ensemble Y;

$f\colon x \mapsto y$ ou $x \overset{f}{\mapsto} y$ — l'application f transforme l'élément x dans l'élément y;

X^Y — la famille de toutes les applications de l'ensemble Y dans l'ensemble X;

card X — la cardinalité de l'ensemble X; pour un ensemble X fini, on emploie également la notation $|X|$;

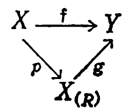
$\{x; A\}$ — l'ensemble de tous les x pour lesquels la condition A est satisfaite.

On dit que l'ensemble X est muni d'une *relation binaire*, si l'on a choisi un sous-ensemble R dans $X \times X$. Au lieu d'écrire $(x, y) \in R$ on écrit également xRy et l'on dit que *x et y se trouvent dans la relation R*, ou bien que *x et y sont liés par la relation R*. La *relation réciproque* R^{-1} se définit comme la famille de toutes les paires (x, y) pour lesquelles $(y, x) \in R$. On appelle *produit* $R_1 \cdot R_2$ la famille de toutes les paires (x, y), pour lesquelles il existe un élément z, tel que $(x, z) \in R_1$, $(z, y) \in R_2$.

La relation R est dite *réflexive*, si R contient la diagonale $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$, *symétrique*, si $R = R^{-1}$, *transitive*, si $R \cdot R \subset R$. Une relation possédant toutes ces trois propriétés s'appelle *relation d'équivalence*. Dans ce cas, au lieu d'écrire $(x, y) \in R$ on écrit « x et y sont R-équivalents » (ou tout simplement équivalents, s'il est clair de quelle relation il s'agit).

La famille des éléments qui sont équivalents à un élément donné $x \in X$ s'appelle *classe d'équivalence* contenant x. L'ensemble $X_{(R)}$ des classes d'équivalence s'appelle partition de l'ensemble X (ou *ensemble-quotient* de X) par la relation R. En faisant correspondre à chaque $x \in X$ la classe qui le contient, on obtient l'*application canonique* $p\colon X \to X_{(R)}$.

Il est clair que l'application $f\colon X \to Y$ peut être incluse dans un diagramme commutatif [1])



si et seulement si f est constante sur chaque classe d'équivalence. Dans ce cas l'application g est entièrement déterminée par f et s'appelle *application quotient*.

On appelle *relation d'ordre* sur un ensemble X toute relation binaire transitive R, antisymétrique dans le sens suivant:

---

[1]) Voir la note au bas de la p. 11.

$R \cap R^{-1} \subset \Delta$. Pour une relation d'ordre R, au lieu d'écrire $(x, y) \in \in R$, on écrit généralement $x \succ y$.

Un ensemble muni d'une relation d'ordre s'appelle *ordonné* (on dit également *partiellement ordonné*). Un ensemble ordonné s'appelle *totalement ordonné*, si $R \cup R^{-1} = X \times X$ (c'est-à-dire lorsque deux éléments quelconques sont comparables). Les propositions suivantes sont équivalentes:

1 (axiome de choix de Zermelo). *Le produit d'une famille quelconque d'ensembles non vides est non vide.*

2 (lemme de Zorn). *Si dans un ensemble ordonné X, tout sous-ensemble linéairement ordonné Y est majoré* (c'est-à-dire qu'il existe un élément $x \in X$ tel que $x \succ y$ pour tout $y \in Y$), *alors l'ensemble X contient au moins un élément maximal* (c'est-à-dire un élément x_0 tel que $x \succ x_0$ implique $x = x_0$; le fait que x_0 est maximal ne veut donc pas dire nécessairement que $x_0 \succ x$ pour tout $x \in X$).

Le lemme de Zorn est une généralisation du principe bien connu de raisonnement par récurrence et remplace ce principe dans tous les cas où nous avons affaire à des ensembles non dénombrales.

On appelle *ensemble filtrant croissant* un ensemble A muni d'une relation d'ordre R qui satisfait à la condition supplémentaire suivante:

quels que soient α, $\beta \in A$, il existe un $\gamma \in A$ tel que $\alpha \prec \gamma$, $\beta \prec \gamma$. En général, la relation $\alpha \prec \beta$ se lit « β suit α ».

Si (A, R) est un ensemble filtrant croissant, X un ensemble quelconque, on appelle *filet* ou *direction* sur X toute application de A dans X. Il est clair que cette notion généralise la notion de suite sur X (à laquelle elle se réduit lorsque A est l'ensemble des entiers naturels, avec l'ordre usuel).

En mathématique, on considère généralement des ensembles munis d'une certaine *structure* (par exemple, des ensembles ordonnés, des groupes, des espaces topologiques, etc.). Cette expression a le sens précis suivant.

Appelons *schéma de construction d'échelons* sur X la famille des ensembles que l'on peut obtenir à partir de X et à partir des ensembles auxiliares S, T, . . . à l'aide des opérations élémentaires indiquées ci-dessus (voir p. 7). Se donner une *structure* sur X veut dire fixer un certain élément du schéma de construction d'échelons sur X. (Pour les exemples de structure cités plus haut les schémas de construction d'échelons sont respectivement de la forme $(2)^{X \times X}$, $X^{X \times X}$, $(2)^{(2)X}$, où (2) est un ensemble auxiliaire de deux éléments.)

1.2. Catégories et foncteurs.

La langue de la théorie des catégories dont on se sert dans ce livre est si simple et naturelle qu'elle ne posera pas de difficultés, même au lecteur qui n'en

a jamais abordé l'étude. Nous indiquerons ici seulement quelques définitions fondamentales. Des notions plus approfondies peuvent être obtenues en lisant, par exemple, le premier chapitre du livre de A. Grothendieck [26] ou l'appendice de D. A. Buchsbaum au livre [9]. Voir également le supplément « La langue des catégories » au cours de Y. I. Manine de géométrie algébrique (éditions de l'Université de Moscou, 1970), supplément dont nous citerons la première phrase:

« La langue des catégories exprime l'attitude « sociologique » vis-à-vis de l'objet mathématique: un groupe ou un espace n'est plus considéré comme un ensemble muni de sa structure interne, mais comme un membre d'une société d'objets du même type. »

On dit qu'une *catégorie* K est donnée si

1) une classe Ob K d'objets de la catégorie K est donnée;

2) pour chaque paire A, B d'objets de K, on a un ensemble Mor (A, B) de *morphismes* de l'objet A vers l'objet B;

3) pour chaque triplet A, B, C d'objets de K, on a une *loi de composition*, c'est-à-dire une application

$$\text{Mor}\,(A, B) \times \text{Mor}\,(B, C) \to \text{Mor}\,(A, C).$$

La composition des morphismes $f \in \text{Mor}\,(A, B)$ et $g \in \text{Mor}\,(B, C)$ se note $g \circ f$ et possède les propriétés suivantes:

a) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ quels que soient $f \in \text{Mor}\,(C, D)$, $g \in \text{Mor}\,(B, C)$, $h \in \text{Mor}\,(A, B)$;

b) pour chaque $A \in \text{Ob}\,K$ il existe un élément $1_A \in \text{Mor}\,(A, A)$ tel que $1_A \circ f = f$, $g \circ 1^A = g$ quels que soient $f \in \text{Mor}\,(B, A)$, $g \in \text{Mor}\,(A, B)$.

Comme exemple, citons la catégorie M, pour laquelle Ob M est la classe de tous les ensembles et $\text{Mor}\,(A, B) = B^A$.

Un grand nombre de catégories considérées par la suite sont des *sous-catégories* de M, c'est-à-dire que les objets de ces catégories sont des ensembles, les morphismes — des applications d'ensembles, les compositions des morphismes — les compositions usuelles d'applications [1]).

Si le morphisme $f \in \text{Mor}\,(A, B)$ admet un morphisme *réciproque* f^{-1} (c'est-à-dire tel que $f \circ f^{-1} = 1_B$, $f^{-1} \circ f = 1_A$), alors on l'appelle *isomorphisme*, et les objets A et B sont dits *isomorphes*.

Pour chaque catégorie K, on peut définir une catégorie *duale* K°. Par définition $\text{Ob}\,K^\circ = \text{Ob}\,K$, $\text{Mor}\,(A, B)^\circ = \text{Mor}\,(B, A)$. La composition de f et g dans K° se définit comme la composition de g et f dans K.

Un objet X s'appelle *objet universel initial* (respectivement *objet universel terminal*) de la catégorie K si, pour chaque $Y \in \text{Ob}\,K$, l'ensemble Mor (X, Y) (respectivement l'ensemble Mor (Y, X)) con-

---

[1]) Le lecteur voudra peut-être connaître des exemples de catégories qui n'ont pas cette propriété. Telles sont, par exemple, les catégories de groupes formels ou les catégories de diagrammes, dont la catégorie K_A considérée ci-dessous constitue un cas particulier.

tient exactement un seul élément. Il découle de cette définition que si une catégorie K posséde plusieurs objets universels, ces objets sont canoniquement isomorphes.

Il est clair que lorsqu'on passe à la catégorie duale, l'objet universel initial devient objet universel terminal et inversement.

Le concept d'objet universel permet de considérer d'un point de vue uniforme de nombreuses constructions employées en mathématique. En particulier, nous verrons ci-dessous que les produits tensoriels, les algèbres enveloppantes, les représentations induites et les cohomologies des groupes peuvent être définis comme des objets universels dans des catégories appropriées.

A titre d'exemple, nous donnerons ici la définition de la somme et du produit d'objets dans une catégorie quelconque.

Soit $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'objets de la catégorie K. Considérons une nouvelle catégorie K_A. Ses objets sont des collections $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$, où Y est un objet de K et $f_\alpha \in \mathrm{Mor}\,(X_\alpha, Y)$.

On appelle morphisme de $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$ dans $(Z, \{g_\alpha\}_{\alpha \in A})$ un morphisme h: $Y \to Z$ tel que pour tout $\alpha \in A$ le diagramme suivant est commutatif [1])

$$\begin{array}{ccc} & X_\alpha & \\ {}^{f_\alpha}\swarrow & & \searrow^{g_\alpha} \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

Supposons que dans la catégorie K_A il existe un objet universel initial $\{X, i_\alpha\}$ (tous ces objets, comme nous l'avons remarqué plus haut, sont canoniquement équivalents). L'objet X s'appelle *somme* de la famille $\{X_\alpha\}$ et le morphisme i_α *injection canonique* de l'objet X_α dans la somme X.

La définition du *produit* P de la famille $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et de la *projection canonique* $p_\alpha \in \mathrm{Mor}\,(P, X_\alpha)$ s'obtient de la définition de la somme par *inversion des flèches*, c'est-à-dire en remplaçant K_A par $(K_A^\circ)^\circ$.

P r o b l è m e 1. Démontrer que pour toute famille d'ensembles de la catégorie M, la somme et le produit existent.

I n d i c a t i o n. Considérer l'opération de réunion disjointe et de produit usuel d'ensembles.

Une simple modification de la définition de la somme et du produit d'une famille d'objets nous amène au concept de limite inductive et projective. Soit A un ensemble d'indexes filtrant croissant; supposons que pour tout $\alpha \prec \beta$ un morphisme $f_{\alpha\beta} \in$

---

[1]) Un diagramme formé d'objets et de morphismes de la catégorie K s'appelle *commutatif*, si la composition des morphismes le long d'une trajectoire de flèches quelconque dépend seulement du début et de la fin de cette trajectoire. Dans notre exemple, cela veut dire que $h \circ f_\alpha = g_\alpha$.

$\in \mathrm{Mor}\,(X_\alpha, X_\beta)$ tel que $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}$ (pour chaque triplet $\alpha \prec \beta \prec \gamma$) est donné. Considérons la catégorie dont les objets sont toutes les collections $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$, $f_\alpha \in \mathrm{Mor}\,(X_\alpha, Y)$ telles que, pour chaque $\alpha \prec \beta$, les diagrammes suivants sont commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} & X_\beta \\ & {\scriptstyle f_\alpha}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f_\beta} & \\ & Y & \end{array}$$

Les morphismes de $(Y, \{f_\alpha\})$ dans $(Z, \{g_\alpha\})$ sont des morphismes $h \in \mathrm{Mor}\,(Y, Z)$ tels que, pour tout $\alpha \in A$, les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} & X_\alpha & \\ & {\scriptstyle f_\alpha}\swarrow \quad \searrow{\scriptstyle g_\alpha} & \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

L'objet universel initial dans cette catégorie s'appelle *limite inductive* de la famille $\{X_\alpha\}$. La définition de la *limite projective* s'obtient par inversion des flèches.

Problème 2. Soit A l'ensemble des entiers naturels avec la relation d'ordre suivante: $m \prec n \Longleftrightarrow m$ divise n; chaque X_n l'ensemble des entiers relatifs; l'application f_{mn} la multiplication par n/m. Démontrer que la limite inductive de la famille $\{X_m\}$ s'identifie naturellement avec l'ensemble des nombres rationnels et l'application f_m avec la division par m.

Soient K_1 et K_2 deux catégories. Si l'on fait correspondre à chaque objet X de K_1 l'objet correspondant $F(X)$ dans K_2, et à chaque morphisme $f \in \mathrm{Mor}\,(X, Y)$ le morphisme

$$F(f) \in \mathrm{Mor}\,(F(X), F(Y)),$$

de sorte que l'on ait les égalités

$$F(1_X) = 1_{F(X)}, \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

on dit alors qu'est donné un *foncteur covariant* de K_1 dans K_2. La notion de *foncteur contravariant* s'obtient si l'on remplace la dernière condition ci-dessus par $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ (ce qui équivaut à remplacer l'une des catégories K_1, K_2 par la catégorie duale).

Les foncteurs covariants de K_1 dans K_2 forment eux-mêmes une catégorie, où les morphismes de F dans G sont les morphismes dits *fonctoriels*, qui font correspondre à chaque objet X de K_1 un

morphisme $\varphi(X): F(X) \to G(X)$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi(x)} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & G(Y) \end{array}$$

est commutatif pour chaque $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$.

On définit d'une manière analogue la catégorie des foncteurs contravariants.

On peut définir également les foncteurs de plusieurs variables, covariants par rapport à certaines variables et contravariants par rapport à d'autres.

Problème 3. Démontrer que pour toute catégorie K, l'application $(X, Y) \mapsto \mathrm{Mor}(X, Y)$ peut être prolongée en un foncteur de $K \times K$ dans M, contravariant par rapport au premier argument et covariant par rapport au second.

Indication. Poser $F(f, g): \varphi \mapsto g \circ \varphi \circ f$ pour $f \in \mathrm{Mor}(X_1, X)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y, Y_1)$, $\varphi \in \mathrm{Mor}(X, Y)$.

Un foncteur covariant F de la catégorie K dans M est dit *représentatif*, s'il est isomorphe au foncteur $\mathrm{Mor}(X, \cdot)$ que l'on obtient à partir du *bifoncteur* Mor [1]) en fixant d'une manière appropriée le premier argument. L'objet X s'appelle alors *objet représentatif* pour le foncteur F.

D'une manière analogue, le foncteur contravariant F possède un objet représentatif Y si F est isomorphe à $\mathrm{Mor}(\cdot, Y)$.

De nombreux foncteurs importants sont représentatifs, ou deviennent représentatifs, par une modification appropriée de la catégorie considérée.

1.3. Eléments de topologie.

Les notions de topologie considérées ci-dessous ne sont en fait qu'une liste de notations, de concepts et de faits fondamentaux. Les lecteurs désireux de se familiariser avec les fondements de topologie sont renvoyés au livre [40], chapitre II. Pour un exposé plus détaillé voir le livre de J. L. Kelley [38].

On appelle *espace topologique* l'ensemble X muni d'un système τ de sous-ensembles qui possède les propriétés suivantes:

1) l'ensemble vide et tout l'ensemble X appartiennent à τ;
2) l'intersection d'un nombre fini d'éléments de τ appartient à τ;
3) la réunion d'une famille quelconque d'éléments de τ appartient à τ.

Le système τ s'appelle *topologie* sur X.

Un sous-ensemble $\tau' \subset \tau$ s'appelle *base de la topologie* τ, si chaque élément de τ est la réunion d'une certaine famille d'éléments

[1]) C'est-à-dire un foncteur de deux variables.

de τ'. Chaque système de sous-ensembles de X, qui satisfait aux deux premières conditions ci-dessus est une base d'une certaine topologie.

Les ensembles appartenant à la topologie τ s'appellent *ouverts* par rapport à cette topologie. On appelle voisinage du point $x \in X$ tout sous-ensemble ouvert qui le contient. L'ensemble complémentaire à un ouvert s'appelle *fermé*. Pour chaque $Y \subset X$ il existe un fermé minimal qui contient Y. On l'appelle *adhérence* de Y. On dit que le sous-ensemble Y est dense dans X, si l'adhérence de Y coïncide avec X. Les ensembles qui s'obtiennent à partir des ensembles fermés et ouverts par les opérations de réunion dénombrable, d'intersection dénombrable et par passage à l'ensemble complémentaire, s'appellent *boréliens*.

Dans un espace topologique X, on peut définir le concept général de *limite* de la manière suivante. Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un filet sur X (c'est-à-dire une famille de points de X, indexés par les éléments d'un ensemble filtrant croissant A ; voir 1.1). Le point x s'appelle *limite* du filet $\{x_\alpha\}$, si pour chaque voisinage U du point x, il existe un élément $\alpha \in A$, tel que $x_\beta \in U$ pour tout $\beta \succ \alpha$. Nous noterons ceci par $x_\alpha \underset{A}{\to} x$ ou bien $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = x$. On omettra souvent de noter explicitement l'ensemble A.

Une application d'un espace topologique dans un autre s'appelle *continue*, si l'image inverse de chaque ouvert est un ouvert, et *borélienne* si cette image est un ensemble borélien.

Problème 1. Démontrer que l'application f est continue si et seulement si $x_\alpha \underset{A}{\to} x$ entraîne $f(x_\alpha) \underset{A}{\to} f(x)$ (c'est-à-dire que f est permutable à l'opération du passage à la limite).

Dans les espaces à base dénombrable il suffit de remplacer les filets, dans la condition du problème 1, par les suites usuelles.

Les espaces topologiques et leurs applications forment une catégorie T, où l'on peut définir la somme et le produit d'une famille quelconque d'objets.

Problème 2. Démontrer que le produit d'une famille d'espaces topologiques $\{X_\alpha, \tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est l'ensemble $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ de topologie τ, dont la base est formée des ensembles de la forme $\prod\limits_{\alpha \in A_1} U_\alpha \times \prod\limits_{\alpha \in A \setminus A_1} X_\alpha$ où A_1 est un sous-ensemble fini de A, $U_\alpha \in \tau_\alpha$.

Indication. Considérer d'abord le produit de deux espaces.

Si l'intersection de Y avec tout ouvert de X est considerée comme ensemble ouvert dans Y chaque sous-ensemble Y d'un espace topologique (X, τ) devient lui-même un espace topologique. Le sous-ensemble Y, muni de cette topologie, s'appelle *sous-espace* de X.

Soit R une relation d'équivalence sur X; l'ensemble quotient $X_{(R)}$ sera un espace topologique, si l'on appelle ouverts ceux des sous-ensembles de $X_{(R)}$, dont les images inverses dans X sont des ouverts. L'ensemble $X_{(R)}$ muni de cette topologie s'appelle *espace quotient* de l'espace X.

Un espace topologique s'appelle *compact*, si dans chaque recouvrement de cet espace par des ouverts on peut choisir un sous-recouvrement fini.

Problème 3. Le produit d'une famille quelconque d'espaces compacts et l'image d'un espace compact par une application continue sont des espaces compacts.

Un espace topologique est dit *séparé* ou *de Hausdorf*, si deux points distincts quelconques possèdent des voisinages disjoints, ou *semi-séparé* (on dit également *espace* T_0) si l'un des points possède un voisinage qui ne contient pas l'autre. On dit d'un espace de Hausdorf qu'il est un *compact*, si c'est un espace compact. (Ne pas confondre « compact » (nom commun) avec « compact » (adjectif).)

Dans chaque espace de Hausdorf un filet quelconque ne peut posséder qu'une seule limite. Cette propriété est si importante, que la majorité des espaces topologiques considérés en mathématiques et dans leurs applications, sont des espaces de Hausdorf.

Il existe néanmoins des classes importantes d'espaces topologiques qui ne sont pas, en général, séparés. Ce sont, premièrement, les espaces quotients (par exemple, les espaces des orbites d'un groupe de transformations — voir ci-dessous le § 2; ils sont, dans les cas les plus intéressants, des espaces de type T_0 non séparés) et, deuxièmement, les espaces considérés en géométrie algébrique, minus de la topologie de Zariski (dans lesquels les ensembles fermés sont des ensembles de solutions de systèmes d'équations algébriques).

Un espace topologique s'appelle *connexe*, s'il ne peut pas être mis sous la forme de somme de deux sous-ensembles disjoints simultanément ouverts et fermés.

Problème 4. Toute application continue d'un espace connexe dans un espace *discret* (c.-à-d. tel que tous les sous-ensembles sont ouverts) est constante.

Indication. Démontrer que l'image inverse de chaque point est vide, ou bien coïncide avec l'espace tout entier.

Une classe importante d'espaces topologiques s'obtient grâce à la construction suivante.

On dit qu'une *distance* (ou une *métrique*) est donnée sur l'ensemble X s'il existe une fonction non négative ρ sur $X \times X$ à valeurs réelles, possédant les propriétés suivantes:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ et $\rho(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(x, y)$;
3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

L'ensemble X, muni d'une distance, s'appelle *espace métrique*. Chaque espace métrique peut être considéré comme étant topologique, si l'on prend pour base d'ensembles ouverts, la famille des boules ouvertes, c'est-à-dire des ensembles de la forme $B_r(x) = \{y;\ \rho(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r \in \mathbf{R}$.

Bien entendu, des espaces métriques distincts peuvent engendrer des espaces topologiques isomorphes. D'autre part, il existe des espaces topologiques, qui ne peuvent être obtenus par cette construction; on les appelle *non métrisables*.

Pour les espaces à base dénombrable, la métrisabilité est équivalente à chacune des conditions suivantes:

a) deux fermés quelconques disjoints possèdent des voisinages disjoints [1];

b) toute fonction continue à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble fermé, se prolonge à une fonction continue, définie sur l'espace tout entier.

Tout espace métrique admet les deux notions fondamentales: continuité uniforme et espace complété. L'analyse de ces concepts nous amène à la définition suivante.

L'ensemble X s'appelle *espace uniforme* ou espace de proximité, si X est muni d'un système σ de relations binaires possedant les propriétés suivantes:

(1) chaque relation $R \in \sigma$ contient la diagonale Δ:

$$R \supset \Delta = \{(x, x):\ x \in X\} \subset X \times X;$$

(2) pour toute relation $R \in \sigma$ il existe une relation $S \in \sigma$ telle que $SS^{-1} \subset R$.

Si l'on a $R \in \sigma$, au lieu de $(x, y) \in R$, nous dirons que x et y sont *R-proches*.

L'application f d'un espace uniforme (X, σ) dans un espace uniforme (X', σ'), s'appelle *uniformément continue*, si pour chaque $R' \in \sigma'$, il existe un $R \in \sigma$, tel que du fait que les éléments x et y sont R-proches il découle que $f(x)$ et $f(y)$ sont R'-proches.

Chaque espace métrique (X, ρ) engendre un espace uniforme (X, σ) pour lequel la famille σ est formée de tous les ensembles de la forme $R_r = \{(x, y);\ \rho(x, y) < r\}$, $r \in \mathbf{R}$.

Chaque espace uniforme (X, σ) engendre un espace topologique (X, τ) dont la base d'ensembles ouverts est formée de tous les ensembles de la forme $R_x = \{y;\ (x, y) \in R\}$, $R \in \sigma$, $x \in X$.

P r o b l è m e 5. Démontrer que l'on peut définir, dans la catégorie des espaces uniformes, le produit d'une famille quelconque d'objets, et que l'opération du passage au produit est permutable au foncteur ci-dessus (de la catégorie des espaces uniformes vers la catégorie des espaces topologiques).

---

[1] On appelle *voisinage d'un ensemble* X tout ensemble ouvert $U \supset X$ qui le contient.

Le filet $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dans un espace uniforme (X, σ) s'appelle *fondamental*, si pour tout $R \in \sigma$, on peut trouver un indice $\alpha \in A$, tel que x_β et x_γ seront R-proches pour tous les β et γ, qui suivent α.

Un espace uniforme s'appelle *complet*, si chaque filet fondamental possède une limite.

Chaque espace uniforme X peut être *complété*, c'est-à-dire inclus comme sous-ensemble dense dans un certain ensemble complet $\overline{X}$. Pour les espaces de Hausdorf cette inclusion $i: X \to \overline{X}$ peut être définie comme objet universel dans la catégorie des applications dans les espaces complets. Par conséquent, dans ce cas, le complété se définit d'une manière unique, à isomorphisme près.

Problème 6. Soient X un espace de Hausdorf complet, Y un sous-espace de X. Démontrer que le complété de Y coïncide avec son adhérence dans X.

Une méthode puissante pour étudier la catégorie T des espaces topologiques et les catégories qui en dérivent consiste à construire des foncteurs à partir de ces catégories dans d'autres catégories.

Soit HT la catégorie d'espaces topologiques dont les morphismes sont les classes homotopiques des applications continues. (Deux applications f_0 et f_1 de X dans Y appartiennent à la même *classe d'homotopie* ou sont *homotopes*, s'il existe une famille d'applications $f_t\colon X \to Y$, $t \in [0, 1]$, telle que l'application

$$X \times [0, 1] \to Y\colon (x, t) \mapsto f_t(x)$$

est continue.)

La majorité des foncteurs employés sont de la forme $F = F_1 \circ G$, où G est le foncteur naturel de T dans HT faisant correspondre à chaque objet cet objet lui-même, et à chaque morphisme sa classe d'homotopie.

Exemple 1. $\pi_n(X, x)$ est le n-ième *groupe d'homotopie* de l'espace X par rapport au point $x \in X$. C'est un foncteur covariant de la catégorie T_1 des espaces pointus (dont les objets sont des espaces topologiques avec un point fixe distingué, et les morphismes des applications continues, faisant correspondre entre eux les deux points distingués) dans la catégorie des ensembles pour $n = 0$, des groupes pour $n = 1$ et des groupes abéliens, $n > 1$.

La définition usuelle des groupes d'homotopie peut être énoncée de la manière suivante. Soit G_1 le foncteur naturel de T_1 vers HT_1 (la catégorie des espaces pointus ayant pour morphismes les classes d'homotopie des applications, qui envoient le point distingué dans un point distingué). Alors $\pi_n = F_n \circ G_1$ où $F_n = \mathrm{Mor}\,(S^n, \cdot)$ et S^n désigne une sphère n-dimensionnelle (avec point distingué).

Le groupe $\pi_1(X)$ s'appelle groupe *fondamental* ou groupe de Poincaré de l'espace X. Si ce groupe est trivial, l'espace s'appelle simplement *connexe*.

Exemple 2. $H^n(X, \Pi)$ est le n-ième groupe de cohomologies de l'espace X à coefficients dans le groupe Π. Il existe plusieurs définitions différentes de ce foncteur (simpliciale, de CW-complexes, singulière, de Čech, de De Rham, et autres). Pour des espaces « suffisamment bons » (en particulier, pour les variétés compactes différenciables; voir § 5), toutes ces définitions sont équivalentes entre elles. Nous donnons ici une définition basée sur le concept de foncteur représentatif. Soit $K(\Pi, n)$ un espace topologique, qui possède les propriétés suivantes

$$\pi_m(K(\Pi, n), *) = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \neq n, \\ \Pi \text{ pour } m = n. \end{cases}$$

(On peut montrer qu'un tel espace existe, et que tous ces espaces sont des objets isomorphes dans la catégorie HT_1 définie plus haut.)

Alors $H^n(\cdot, \Pi) = F^n_\Pi \circ G$, G est le foncteur naturel de T vers HT_1 tandis que $F^n_\Pi = \mathrm{Mor}(\cdot, K(\Pi, n))$.

Problème 7. Si l'espace X se déforme en un point sur soi-même, on a alors $H^n(X, \Pi) = 0$ pour $n \geqslant 1$.

Indication. L'objet X est isomorphe à un point de la catégorie HT_1.

Les espaces $K(\Pi, n)$ ont une structure assez compliquée. A l'exception de certains espaces $K(\Pi, 1)$, ils sont tous de dimension infinie.

Problème 8. Démontrer que pour espace $K(\mathbf{Z}, 1)$, $\mathbf{Z}$ étant le groupe des entiers relatifs, on peut prendre le cercle ordinaire S^1.

Citons encore une définition plus pratique pour les calculs directs.

Soit $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement de l'espace X par des ensembles ouverts. Appelons *cochaîne* de dimension n du recouvrement $\mathfrak{U}$ à coefficients dans Π, toute fonction c de $A \times A \times \ldots \times A$ ($n + 1$ facteurs) dans Π possèdant les propriétés suivantes:

1) l'ensemble de définition de c est formé de tous les suites $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour lesquelles l'intersection $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ est non vide;

2) la fonction c est alternée, c'est-à-dire qu'elle change de signe lorsqu'on transpose deux arguments.

L'ensemble de toutes les cochaînes n-dimensionnelles forme un groupe, noté $C^n(\mathfrak{U}, \Pi)$.

Introduisons un *opérateur de cobord* d, qui agit de $C^n(\mathfrak{U}, \Pi)$ dans $C^{n+1}(\mathfrak{U}, \Pi)$ de la manière suivante:

$$dc(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i c(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{n+1})$$

(le signe ^ veut dire que l'argument écrit sous ce signe est omis).

La cochaîne dc s'appelle *cobord* de la chaîne c. Désignons par $B^n(\mathfrak{U}, \Pi)$ l'ensemble de tous les cobords n-dimensionnels. Si l'on a $dc = 0$, on dit alors que la cochaîne c est un *cocycle*. Désignons par $Z^n(\mathfrak{U}, \Pi)$ l'ensemble de tous les cocycles n-dimensionnels.

L'opérateur d, comme on vérifie aisément, possède la propriété $d^2 = 0$. Par conséquent

$$B^n(\mathfrak{U}, \Pi) \subset Z^n(\mathfrak{U}, \Pi).$$

Le groupe quotient

$$H^n(\mathfrak{U}, \Pi) = Z^n(\mathfrak{U}, \Pi)/B^n(\mathfrak{U}, \Pi)$$

s'appelle *groupe de cohomologie* de dimension n (d'après Čech) du recouvrement $\mathfrak{U}$. Le groupe $H^n(X, \Pi)$ peut être défini comme limite inductive des groupes $H^n(\mathfrak{U}, \Pi)$ par le filet de tous les recouvrements. Le calcul direct de cette limite peut souvent être évité grâce au théorème suivant :

Théorème de Leray. Si le recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ est tel, que tous les ensembles U_α et leurs intersections ont des groupes de cohomologie triviaux dans les dimensions $n \geqslant 1$, alors

$$H^n(X, \Pi) = H^n(\mathfrak{U}, \Pi).$$

Problème 9 (D. A. Kajdan). Déduire du théorème de Leray le théorème de Helley suivant :

Si dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ *on a une famille de* $n + 2$ *ensembles convexes, dont tous les* $n + 1$ *ont un point commun, alors tous ces* $n + 2$ *ensembles ont eux aussi un point commun.*

Indication. Faire appel au problème 7 et au fait que $H^n(X, \mathbf{Z}) = 0$ pour tout ensemble $X \subset \mathbf{R}^n$.

Corollaire. La condition de convexité dans le théorème de Helley peut être remplacée par la condition plus faible suivante : tous les ensembles et leurs intersections possèdent des cohomologies triviales en dimensions $n \geqslant 1$.

Problème 10. Démontrer que

$$H^k(S^n, \Pi) = \begin{cases} \Pi \text{ pour } k=0 \text{ et } n, \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Indication. Considérer le recouvrement de la sphère par $n + 2$ demi-sphères ouvertes.

Pour des renseignements plus détaillés sur les foncteurs π_n, $H^n(\cdot, \Pi)$ et d'autres foncteurs voir les livres [2], [53], [31], [32].

§ 2. GROUPES ET ESPACES HOMOGÈNES

2.1. Groupes de transformations et groupes abstraits. On appelle *groupe de transformations* une famille non vide G de transformations (c'est-à-dire d'applications dans soi-même) d'un certain ensemble X, telle que :

1) si $g_1 \in G$ et si $g_2 \in G$, alors $g_1 g_2 \in G$,
2) si $g \in G$, alors g^{-1} existe et appartient à G.

Comme exemple de groupe de transformations, citons le groupe G_1 de toutes les bijections de X sur soi-même et le groupe G_0 qui ne contient que la transformation identique. Il est clair que chaque groupe G de transformations de X est compris entre ces deux groupes: $G_0 \subset G \subset G_1$.

Problème 1. Enumérer tous les groupes de transformations d'un ensemble de trois éléments.

Supposons que l'ensemble X soit muni d'une certaine structure. La famille G de toutes les transformations g telles que g et g^{-1} ne modifient pas cette structure forme évidemment un groupe. Ce groupe s'appelle groupe des *automorphismes* de cette structure.

Exemples. Le groupe des homéomorphismes d'un espace topologique, le groupe des isométries d'un espace métrique, le groupe des opérateurs linéaires inversibles.

En fait, cette méthode de construction des groupes de transformations a un caractère universel: chaque groupe de transformations est un groupe d'automorphismes d'une structure choisie de manière appropriée.

Il est souvent utile de faire abstraction du fait que les éléments du groupe G sont les transformations d'un certain ensemble, et de ne se rappeler que de la loi de multiplication de ces éléments.

Le concept qui apparaît alors s'appelle *groupe abstrait* (pour le différentier d'un groupe de transformations), ou simplement groupe. Plus exactement, on appelle *groupe* un ensemble G, muni d'une loi de multiplication (c'est-à-dire une application $G \times G \to G$; nous écrirons $g_1 \circ g_2$ ou simplement g_1g_2 le résultat de la multiplication de g_1 par g_2), qui possède les propriétés suivantes:

1) *associativité*: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$;

2) *existence d'élément unité*: le groupe G possède un élément e, tel que $e \circ g = g \circ e = g$ pour tout $g \in G$;

3) *existence d'éléments inverses*: pour chaque $g \in G$, il existe un tel $g^{-1} \in G$, que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Un groupe G s'appelle *commutatif*, ou *abélien*, si, outre des conditions ci-dessus, on a:

4) *commutativité*: $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ pour $g_1, g_2 \in G$ quelconques.

Dans les groupes commutatifs l'opération de groupe est souvent appelée addition, la notation $g_1 + g_2$ préférée à $g_1 \circ g_2$ et l'élément unité désigné par 0.

Il est évident que chaque groupe de transformations est un groupe dans le sens de la définition ci-dessus. Les groupes tels que:

a) le groupe des transformations isométriques d'un triangle équilatéral,

b) le groupe de toutes les bijections d'un ensemble de trois éléments sur soi-même,

c) le groupe de toutes les matrices inversibles d'ordre deux à coefficients dans le corps des restes modulo 2,

d) le groupe des transformations rationnelles du plan complexe engendré par les transformations $z \mapsto z^{-1}$ et $z \mapsto 1 - z$, sont tous des groupes de transformations différents, mais identiques (isomorphes) en tant que groupes abstraits. Chacun d'entre eux contient 6 éléments, qui se multiplient d'après la même loi de composition (vérifiez-le!).

L'application φ d'un groupe G dans un groupe H s'appelle *homomorphisme*, si $\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ quels que soient g_1, $g_2 \in G$. Les groupes et leurs homomorphismes forment la *catégorie des groupes*.

Dans le cas où le groupe H est commutatif, les homomorphismes de G dans H forment eux-mêmes un groupe commutatif par rapport à l'opération $(\varphi_1 + \varphi_2)(g) = \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$. Ce groupe est noté Hom (G, H).

Problème 2. Trouver le groupe Hom (G, H), où G et H sont des groupes suivants:

a) le groupe $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs avec l'opération d'addition;

b) le groupe $\mathbf{Z}_n$ des restes modulo n avec l'opération d'addition;

c) le groupe $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels avec l'opération d'addition;

d) le groupe $\mathbf{Q}^*$ des nombres rationnels non nuls avec l'opération de multiplication.

Indication. La réponse est donnée par la table suivante, où (m, n) désigne le P.G.C.D. des nombres m et n, et $\oplus$ la somme directe dans la catégorie des groupes abéliens.

$G \backslash H$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_m$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}^*$
$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_m$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}^*$
$\mathbf{Z}_n$	0	$\mathbf{Z}_{(m,n)}$	0	$\mathbf{Z}_{(n,2)}$
$\mathbf{Q}$	0	0	$\mathbf{Q}$	0
$\mathbf{Q}^*$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\oplus\mathbf{Z}\oplus\ldots$	$\mathbf{Z}_{(m,2)}\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\oplus\mathbf{Z}_m\oplus\mathbf{Z}_m\oplus\ldots$	$\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}\oplus\ldots$	$\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\ldots\ldots\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\ldots$

Soit un homomorphisme $\varphi: G \to H$; alors,

ker $\varphi = \{g \in G: \varphi(g) = e\}$ est le *noyau* de l'homomorphisme φ,

im $\varphi = \{\varphi(g): g \in G\}$ est l'*image* de l'homomorphisme φ.

Une suite de groupes et d'homomorphismes

$$\ldots \to G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \to \ldots$$

s'appelle *exacte*, si l'image de chaque homomorphisme coïncide avec le noyau de l'homomorphisme suivant. Par exemple, les suites suivantes (où le chiffre 1 représente le groupe d'un seul élément)

$$1 \to G \xrightarrow{\varphi} H, \qquad G \xrightarrow{\varphi} H \to 1, \qquad 1 \to G \xrightarrow{\varphi} H \to 1$$

sont exactes si et seulement si φ est un *monomorphisme* (c'est-à-dire que $\ker \varphi = 1$), un *épimorhisme* (c'est-à-dire que $\operatorname{im} \varphi = H$) et un *isomorphisme*, respectivement.

Soit g_0 un élément fixe du groupe G. L'application $g \mapsto g_0^{-1} g g_0$ est un *automorphisme* du groupe G (c'est-à-dire un isomorphisme du groupe sur lui-même). Les automorphismes de ce type s'appellent *internes*. On écrit souvent g^{g_0} au lieu de $g_0^{-1} g g_0$.

L'homomorphisme φ d'un groupe abstrait dans un groupe de transformations s'appelle *réalisation* ou *représentation* de ce groupe. Une représentation s'appelle *exacte* si φ est un monomorphisme.

L'ensemble X s'appelle *G-espace à gauche* s'il est muni d'une réalisation de G dans le groupe des transformations de X. Dans ce cas, on dit également que le groupe G *agit à gauche* sur X et le résultat de l'action de l'élément $g \in G$ sur l'élément $x \in X$ est désigné par gx. L'égalité $g_1 (g_2 x) = (g_1 g_2) x$ est alors satisfaite.

On rencontre souvent la situation où à chaque élément $g \in G$ correspond une transformation $\varphi (g)$ de l'ensemble X telle que $\varphi (g_1 g_2) = \varphi (g_2) \varphi (g_1)$. Dans ce cas, φ s'appelle *antireprésentation de G* et l'ensemble X s'appelle *G-espace à droite*. On dit également dans ce cas que G *agit à droite* sur X et l'on écrit l'élément $\varphi (g) x$ sous la forme xg. On a alors l'égalité $(x g_1) g_2 = x (g_1 g_2)$.

Exemple 1. Par rapport au groupe $G = GL (n, K)$ des matrices inversibles d'ordre n sur le corps K l'ensemble des vecteurs-colonnes forme un G-espace à gauche et l'ensemble des vecteurs-lignes un G-espace à droite.

Exemple 2. Dans chaque catégorie l'ensemble $\operatorname{Mor} (A, B)$ est un G_1-espace à gauche par rapport à $G_1 = \operatorname{Aut} A$ et un G_2-espace à droite par rapport à $G_2 = \operatorname{Aut} B$ ($\operatorname{Aut} A$ désigne ici le groupe d'automorphismes de l'objet A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments inversibles de $\operatorname{Mor} (A, A)$).

Les G-espaces à gauche et à droite forment deux catégories, dont les morphismes s'appellent *G-applications* et sont toutes les applications permutables à l'action du groupe. Ces deux catégories sont canoniquement isomorphes, car chaque G-espace à gauche sur X se transforme en un G-espace à droite si l'on pose par définition $xg = g^{-1} x$.

Soient X et Y deux G-espaces. On appelle *produit sur G* des espaces X et Y l'ensemble quotient $X \underset{G}{\times} Y$ du produit $X \times Y$ par rapport à l'équivalence déterminée par l'action de G sur $X \times Y$. Par exemple, lorsque X et Y sont respectivement des G-espaces à gauche et à droite, les paires (x, y) et (x', y') sont équivalentes si et seulement si $x' = xg$, $y' = g^{-1}y$ pour un certain $g \in G$.

Un cas particulier important de cette construction s'obtient si l'on prend pour l'espace Y un groupe G_1 contenant G et muni d'une structure évidente de G-espace à gauche. Dans ce cas, le produit $X \underset{G}{\times} G_1$ se munit d'une structure naturelle de G_1-espace à droite.

La correspondance $X \mapsto X \underset{G}{\times} G_1$ engendre, comme on vérifie aisément, un foncteur de la catégorie K_G de tous les G-espaces dans la catégorie K_{G_1} de tous les G_1-espaces. Soit G_1 le groupe des rotations de l'espace à trois dimensions autour d'un point fixe O, G étant le sous-groupe des rotations autour d'un axe l passant par le point O. Soit X un plan de deux dimensions orthogonal à l, avec l'action naturelle de G sur X. Alors $X \underset{G}{\times} G_1$, considéré comme un G_1-espace, est isomorphe à l'ensemble de tous les vecteurs tangents à la sphère de centre O.

Ce même foncteur peut être obtenu d'une autre façon naturelle.

Problème 3. Soit X un objet de la catégorie K_G. Considérons le foncteur F de la catégorie K_{G_1} dans la catégorie des ensembles:

$$F(Y) = \mathrm{Mor}(X, \widetilde{Y}),$$

où $\widetilde{Y}$ est Y considéré comme un objet de K_G (chaque G_1-espace est donc un G-espace). Démontrer que ce foncteur est un foncteur représentatif et que l'objet représentatif correspondant est $X \underset{G}{\times} G_1$. Autrement dit,

$$\mathrm{Mor}(X, \widetilde{Y}) = \mathrm{Mor}(X \underset{G}{\times} G_1, Y)$$

(comme foncteur de Y).

2.2. Espaces homogènes. On dit que le groupe G *agit transitivement* sur X ou que le G-espace X est *homogène*, si chaque point de X est transformé en n'importe quel autre point par une certaine transformation du groupe G. Chaque G-espace est la réunion d'espaces homogènes. En effet, la *G-orbite* du point $x \in X$ (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points de la forme gx, $g \in G$) est un G-espace homogène, tandis que l'ensemble tout entier est la réunion des orbites de ses points.

On peut décrire, dans un certain sens, tous les G-espaces homogènes. Fixons un point $x \in X$. L'ensemble G_x de tous les éléments de G qui laissent le point x invariant forme un sous-groupe de G. Ce sous-groupe s'appelle *sous-groupe stationnaire* ou *stabilisateur* du point x. Soit $g \in G$. L'ensemble de tous les éléments de la forme gh, $h \in G_x$ s'appelle *classe d'équivalence à gauche* du groupe G par

le sous-groupe G_x; elle est notée gG_x. On vérifie aisément que gG_x se compose de tous les éléments du groupe G qui envoient le point x dans le point gx. Par conséquent, chaque G-espace à gauche uniforme est isomorphe à l'espace des classes d'équivalence à gauche par un certain sous-groupe. Inversement, si H est un sous-groupe de G, alors l'ensemble G/H des classes d'équivalence à gauche de G par H est un G-espace uniforme par rapport à l'action naturelle de G:

$$g\colon g_1H \mapsto gg_1H.$$

Problème 1. Les espaces homogènes G/H_1 et G/H_2 sont isomorphes (en tant qu'objets de la catégorie K_G; voir 2.1), si et seulement si les sous-groupes H_1 et H_2 sont *conjugués*, c'est-à-dire sont envoyés l'un dans l'autre par un automorphisme interne du groupe G.

Tout ce que nous venons de dire se répète mot par mot pour définir les G-espaces à droite et les *classes d'éqivalence à droite*. L'espace des classes d'équivalence à droite de G par H sera noté $H \setminus G$.

Le sous-groupe H s'appelle *invariant* (ou *normal*, ou encore *diviseur normal*) dans G, si tous les sous-groupes conjugués avec H coïncident avec lui. Dans ce cas chaque classe d'équivalence à droite est une classe d'équivalence à gauche et inversement. Un espace homogène G/H devient lui-même un groupe par rapport à l'opération $g_1H \circ g_2H = g_1g_2H$. Géométriquement, cela veut dire que le produit xy s'obtient à partir de y par la même transformation qui donne x à partir du point origine. Cette définition est correcte du fait que tous les sous-groupes stationnaires de tous les points coïncident (la transformation se détermine donc par le résultat de son action sur un seul point). Le groupe ainsi obtenu s'appelle *groupe quotient* de G par H.

Dans ce qui suit nous aurons souvent besoin de forme générale de la G-application d'un G-espace X sur soi-même ou dans un autre G-espace Y. Résolvons dès maintenant cette question pour les G-espaces homogènes. Soient $X = G/H$, $Y = G/K$ et $\varphi\colon X \to Y$ une G-application. Supposons que φ envoie la classe $H \in X$ dans la classe $gK \in Y$. Alors $\varphi(g_1H) = g_1\varphi(H) = g_1gK$, c'est-à-dire que l'application φ est entièrement déterminée par l'élément $g \in G$. Néanmoins cet élément n'est pas arbitraire. En effet, si $h \in H$, alors $hH = H$. Par conséquent, $\varphi(hH) = \varphi(H)$, c'est-à-dire que $hgK = gK$ quel que soit $h \in H$, d'où il s'ensuit $H^g = g^{-1}Hg \subset K$. Inversement, si un élément $g \in G$ possède cette propriété, l'application $\varphi\colon g_1H \to g_1gK$ sera une application bien définie. Les éléments g et g' engendrent alors la même G-application φ, si et seulement si $g^{-1}g' \in K$.

Considérons en détail le cas où $X = Y$ et l'application φ est un automorphisme. Dans ce cas $K = H$ et $H^g = H$, car φ^{-1}, de même que φ, est un automorphisme. L'ensemble des éléments $g \in G$

qui possèdent la propriété $H^g = H$ est appelé *normalisateur* du sous-groupe H dans G et désigné par $N_G(H)$ (ou simplement $N(H)$, s'il est clair de quel groupe G il s'agit). Le groupe $X = G/H$ de tous les automorphismes de G-espace est, par conséquent, isomorphe au groupe quotient $N(H)/H$.

Soient H et K deux sous-groupes de G et $g \in G$. L'ensemble de tous les éléments de la forme hgk, $h \in H$, $k \in K$ est noté HgK et s'appelle *classe d'équivalence double* (ou bilatère) du groupe G par les sous-groupes H et K. L'ensemble de toutes les classes bilatères est noté $H \setminus G/K$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'ensemble $H \setminus G/K$ est isomorphe à:

a) l'ensemble des K-orbites dans $X = H \setminus G$,
b) l'ensemble des H-orbites dans $Y = G/K$,
c) l'ensemble des G-orbites dans $X \times Y$,
d) l'ensemble $X \underset{G}{\times} Y$.

2.3. Types principaux de groupes. Les plus simples sont les groupes commutatifs dont ceux à un nombre fini de générateurs sont faciles à classifier.

Problème 1. Chaque groupe à un seul générateur (un tel groupe s'appelle *cyclique*) est isomorphe soit au groupe $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs, soit au groupe $\mathbf{Z}_m$ des restes modulo m.

On démontre facilement par récurrence que chaque groupe abélien G à un nombre fini de générateurs est isomorphe à la somme de groupes cycliques. L'exemple $G = \mathbf{Q}$ permet de voir que cela n'est pas vrai pour tous les groupes abéliens (le groupe additif des nombres rationnels).

Problème 2. Soit M le P.P.C.M. et d le P.G.C.D. des nombres m et n. Démontrer que les groupes $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$ et $\mathbf{Z}_M \oplus \mathbf{Z}_d$ sont isomorphes.

On déduit facilement de l'énoncé du problème 2 que chaque groupe abélien à un nombre fini de générateurs est isomorphe exactement à un seul groupe de la forme

$$\mathbf{Z}_{m_1} \oplus \mathbf{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_{m_k} \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z},$$

où chacun des nombres m_i, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ est un diviseur du nombre m_{i+1}.

Les groupes non commutatifs peuvent être classifiés par leur degré de non-commutativité. Pour deux sous-ensembles X et Y du groupe G, désignons par $[X, Y]$ l'ensemble de tous les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$, $x \in X$, $y \in Y$.

Considérons deux suites de sous-groupes

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots,$$
$$G = G^0 \supset G^1 \supset G^2 \supset \ldots \supset G^n \supset \ldots,$$

où G_n est le sous-groupe engendré par l'ensemble $[G_{n-1}, G_{n-1}]$ (ce sous-groupe s'appelle n-ième dérivée du groupe G) et G^n le sous-groupe engendré par l'ensemble $[G, G^{n-1}]$.

Pour un groupe commutatif, ces suites sont triviales: $G_n = G^n = 1$ pour $n \geqslant 1$. Le groupe G s'appelle *résoluble* (respectivement *nilpotent*) *de classe* k, si la première (respectivement la seconde) de ces suites se termine, c'est-à-dire $G_n = 1$ (respectivement $G^n = 1$) à partir de $n = k$.

Problème 3. Démontrer que G est un groupe résoluble de classe k, si et seulement s'il existe
un sous-groupe invariant abélien $A_0 \subset G$,
un sous-groupe invariant abélien A_1 de $G_1 = G/A_0$,
un sous-groupe invariant abélien A_2 de $G_2 = G_1/A_1$ etc., et cette chaîne s'interrompt à la k-ième itération, c'est-à-dire que $G_k = 1$.

Indication. Prendre pour A_0 le $(k - 1)$-ième groupe dérivé et raisonner par récurrence sur k.

Soit X un sous-ensemble du groupe G. L'ensemble de tous les éléments du groupe G, permutables à tous les éléments de X, est appelé *centralisateur* de X dans G et désigné par $C_G(X)$. Le centralisateur du groupe lui-même s'appelle *centre* de ce groupe.

Problème 4. Démontrer que G est un groupe nilpotent de classe k, si et seulement si,
G possède un centre C_0 non trivial,
le groupe quotient $G_1 = G/C_0$ possède un centre non trivial C_1,
le groupe quotient $G_2 = G_1/C_1$ possède un centre non trivial C_2, etc, et cette chaîne s'arrête à la k-ième itération, c'est-à-dire que $G_k = 1$.

Indication. C_0 contient G^{k-1}.

Un groupe n'ayant pas de sous-groupes invariants non triviaux (c'est-à-dire différents du groupe entier ou du sous-groupe unité) s'appelle *simple*.

La classification des groupes simples finis est un des problèmes fondamentaux parmi les plus difficiles de la théorie des groupes.

Ainsi, ce n'est que très récemment que l'on a démontré la fameuse hypothèse de Burnside, selon laquelle il n'existe pas de groupes simples d'ordre impair. Néanmoins le développement rapide de la théorie des groupes infinis (groupes de Lie et groupes algébriques) a permis d'enregistrer ces dernières années des progrès notables dans ce domaine.

2.4. Extensions de groupes. Supposons que le groupe G ne soit pas simple, c'est-à-dire qu'il contienne un sous-groupe G_0 normal non trivial. Alors on a la suite exacte:

$$1 \to G_0 \to G \to G_1 \to 1$$

qui s'appelle *extension* du groupe G_1 par le groupe G_0.

L'étude de G dans un nombre important de cas se réduit donc, dans une certaine mesure, à l'étude de deux groupes plus « petits »: le sous-groupe G_0 et le groupe quotient $G_1 = G/G_0$.

Notons que la connaissance de G_0 et de G_1 ne permet pas, en général, de retrouver le groupe G. En effet, chaque élément $g \in G$ définit un automorphisme interne du groupe G qui envoie G_0 dans lui-même. Nous obtenons, par conséquent, un homomorphisme du groupe G dans le groupe Aut G_0 des automorphismes de G_0. Les éléments de G_0 sont envoyés par cet homomorphisme dans le sous-groupe Int G_0 des automorphismes internes. Par conséquent, un homomorphisme de G/G_0 dans le groupe Aut G_0/Int G_0 est défini. Pour retrouver G il suffit donc de connaître l'homomorphisme $\varphi: G_1 \to \to \text{Aut}\, G_0/\text{Int}\, G_0$.

Supposons que cet homomorphisme soit connu, et essayons de retrouver le groupe G. Remarquons que le groupe G peut être identifié (comme ensemble) avec le produit direct des groupes G_1 et G_0. En effet, si dans chaque classe $g_1 \in G_1$ on choisit un représentant $\alpha(g_1) \in G$, chaque élément $g \in G$ se met alors uniquement sous la forme $g = \alpha(g_1)\, g_0$, $g_1 \in G_1$, $g_0 \in G_0$, ce qui nous donne « l'indexation » désirée des éléments de G par les paires de la forme (g_1, g_0). Dans ce qui suit, il nous sera commode de supposer que le représentant de la classe G_0 est l'élément unité. Alors, dans les coordonnées choisies, les éléments du sous-groupe G_0 s'écrivent (e, g_0) et l'égalité suivante est satisfaite:

$$(g_1, g_0)(e, g_0') = (g_1, g_0 g_0').$$

De plus, l'application

$$(e, g_0) \mapsto (g_1, e)(e, g_0)(g_1, e)^{-1}$$

est un automorphisme de G_0 que nous noterons $\psi(g_1)$. Remarquons que l'image de $\psi(g_1)$ dans Aut G_0/Int G_0 nous est connue: c'est $\varphi(g_1)$. Connaissant non seulement φ, mais aussi ψ, nous pourrons calculer le produit d'un élément quelconque de la forme (e, g_0) à gauche par un élément quelconque de G:

$$(e, g_0)(g_1, g_0') = (e, g_0)(g_1, e)(e, g_0') =$$
$$= (g_1, e)(e, \psi(g_1)^{-1} g_0)(e, g_0') = (g_1, [\psi(g_1)^{-1} g_0]\, g_0').$$

Le produit de deux éléments de la forme (g_1, e) doit s'écrire

$$(g_1, e)(g_1', e) = (g_1 g_1', \chi(g_1, g_1')),$$

où $\chi: G_1 \times G_1 \to G_0$ est une certaine application.

Connaissant ψ et χ, on peut calculer le produit de deux éléments quelconques de G par la formule

$$(g_1, g_0)(g_1', g_0') = (g_1 g_1', \chi(g_1, g_1')[\psi(g_1')^{-1} g_0]\, g_0'). \qquad (1)$$

On peut facilement vérifier que les fonctions $\psi: G_1 \to \operatorname{Aut} G_0$ et $\chi: G_1 \times G_1 \to G_0$ sont liées par les relations:

a) $$\psi(g_1)\psi(g_2) = \psi(g_1 g_2) I(\chi(g_1, g_2)),$$

où $I(g)$ est un automorphisme interne de G_0 correspondant à l'élément g $(I(g): g_0 \mapsto g g_0 g^{-1})$,

b) $$\chi(g_1 g_2, g_3)\psi(g_3)^{-1}\chi(g_1, g_2) = \chi(g_1, g_2 g_3)\chi(g_2, g_3),$$

découlant de l'associativité de la multiplication dans G. Inversement, deux fonctions quelconques ψ et χ, qui jouissent des propriétés a) et b) déterminent par la formule (1) la loi de multiplication de groupe sur l'ensemble $G_1 \times G_0$.

Deux extensions, construites à l'aide des fonctions ψ, χ et ψ', χ' sont *équivalentes*, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & G_0 & \to & G & \to & G_1 & \to & 1 \\ & & \| & & \varepsilon\downarrow & & \| & & \\ 1 & \to & G_0 & \to & G' & \to & G_1 & \to & 1, \end{array}$$

si et seulement s'il existe une application $\xi: G_1 \to G_0$ telle que

c) $$\psi'(g_1) = \psi(g_1) I(\xi(g_1)^{-1}),$$

d) $$\chi'(g_1, g_2) = \xi(g_1 g_2)\chi(g_1, g_2)[\psi(g_2^{-1})[\xi(g_1)^{-1}]]\xi(g_2)^{-1}.$$

L'application ε est dans ce cas de la forme

$$\varepsilon: (g_1, g_0) \mapsto (g_1, \xi(g_1) g_0).$$

Il peut néanmoins arriver que des fonctions ψ et χ qui satisfont aux conditions a) et b) n'existent pas. En effet, les automorphismes $\psi(g_1)\psi(g_2)$ et $\psi(g_1 g_2)$ se trouvent dans une même classe d'équivalence $\varphi(g_1 g_2) \in \operatorname{Aut} G_0/\operatorname{Int} G_0$ et, par conséquent, diffèrent par un automorphisme interne.

Par conséquent, l'égalité a) est satisfaite et définit une fonction $\chi(g_1, g_2)$, à un élément du centre du groupe G_0 près (car c'est précisément ce centre qui représente le noyau de l'homomorphisme $I: G_0 \to \operatorname{Int} G_0$). En appliquant I aux deux membres de l'égalité b) on vérifie facilement que ces deux membres diffèrent par un certain élément $\omega(g_1, g_2, g_3) \in C(G_0)$.

L'arbitraire restant pour définir $\chi(g_1, g_2)$ permet de remplacer ω par un élément de la forme

$$\beta(g_1 g_2, g_3)\beta(g_1, g_2)\beta(g_2, g_3)^{-1}\beta(g_1, g_2 g_3)^{-1}, \tag{2}$$

où β est une certaine application de $G_1 \times G_1$ dans $C(G_0)$.

D'autre part, on peut montrer que pour ω on peut prendre une application quelconque de $G_1 \times G_1 \times G_1$ dans $C(G_0)$, si elle possède

la propriété

$$\omega(g_1, g_2, g_3)^{-1}\,\omega(g_1, g_2, g_3g_4)\,\omega(g_1, g_2g_3, g_4)^{-1} = \\ = \omega(g_2, g_3, g_4)\,\omega(g_1g_2, g_3, g_4)^{-1}; \qquad (3)$$

mais cette application ne peut en général être représentée sous la forme (2) à l'aide de l'application β.

Ainsi, on ne peut pas toujours retrouver le groupe G à partir des données G_1, G_0 et $\varphi: G_0 \to \operatorname{Aut} G_0/\operatorname{Int} G_0$. Une certaine application ω, qui satisfait à (3), modulo une application du type (2) est l'obstruction à l'existence de G[1]).

La situation se trouve singulièrement simplifiée si pour l'application $\psi: G_1 \to \operatorname{Aut} G_0$ on peut choisir un homomorphisme. Les extensions, admettant un tel choix de ψ, s'appellent *centrales*. Dans ce cas, de a) il s'ensuit que $I(\chi(g_1, g_2)) \equiv e$ et, par conséquent, la fonction χ est à valeurs dans le centre du groupe G_0. Par conséquent, l'obstruction ω prend automatiquement la forme (2), donc les fonctions χ cherchées existent. D'autre part, si l'on fixe la fonction ψ, l'ensemble des fonctions χ qui satisfont à la condition b) forme un groupe abélien par rapport à la multiplication usuelle. L'ensemble des fonctions équivalentes à la fonction triviale $\chi(g_1, g_2) \equiv e$, dans le sens de la condition d), forme un sous-groupe.

Ainsi, l'ensemble des classes d'extensions équivalentes se trouve muni d'une structure de groupe abélien, qui en simplifie l'étude.

L'élément unité du groupe des classes des extensions est l'extension engendrée par la fonction $\chi(g_1, g_2) \equiv e$. Dans ce cas, le groupe G_1 est inclus dans G en forme de sous-groupe, l'extension s'appelle *décomposable* et le groupe G *produit semi-direct* de G_1 et G_0.

Exemple 1. Le groupe E_n des isométries positives de l'espace euclidien n-dimensionnel est le produit semi-direct du sous-groupe des rotations et de celui des translations.

Exemple 2. Le groupe $\mathrm{GL}(n, K)$ de toutes les matrices d'ordre n non dégénérées, à éléments dans le corps K, est une extension décomposable de K^* (le groupe multiplicatif du corps K), par le groupe $\mathrm{SL}(n, K)$ des matrices unimodulaires.

Exemple 3. Le groupe $\mathbf{Z}_{mn}$ est le produit semi-direct des groupes $\mathbf{Z}_m$ et $\mathbf{Z}_n$, si et seulement si n et m sont premiers entre eux.

L'exercice ci-dessous permet de mieux assimiler les notions exposées.

Problème 1. Décrire toutes les extensions de la forme

$$1 \to \mathbf{Z}_m \to G \to \mathbf{Z}_n \to 1.$$

---

[1]) Pour la formulation de ce fait en termes de cohomologie des groupes voir le problème 2 de **2.5**.

2.5. Cohomologie des groupes.

Comme nous l'avons vu, le problème de l'extension des groupes se réduit à considérer les fonctions de 1,2 et 3 éléments du groupe, liées par certaines relations particulières. Un grand nombre d'autres questions de la théorie des représentations, de la géométrie algébrique, de la topologie se réduisent à des fonctions et relations analogues. L'analyse d'une telle situation a fait naître la notion de cohomologie d'un groupe; ce qui a permis de réunir sous un seul schéma de nombreuses théories assez proches. Nous ne donnons ici que quelques définitions fondamentales, renvoyant le lecteur soucieux de détails au livre de S. MacLane [43], où il peut trouver un exposé abordable et suffisamment complet des fondements de l'algèbre homologique, dont fait partie la théorie de la cohomologie des groupes.

Supposons que le groupe G agisse sur un groupe abélien M. La fonction $c(g_0, \ldots, g_n)$ définie sur $G \times \ldots \times G$ à valeurs dans M s'appelle *cochaîne de dimension n*, si

$$c(gg_0, \ldots, gg_n) = gc(g_0, \ldots, g_n)$$

pour tous les $g, g_i \in G$. L'ensemble de toutes les cochaînes de dimension n forme un groupe $C^n(G, M)$. Introduisons l'opérateur d qui agit de $C^n(G, M)$ dans $C^{n+1}(G, M)$ selon la formule

$$dc(g_0, \ldots, g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i c(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_{n+1}).$$

Ici le signe ^ indique que l'argument correspondant doit être omis. La cochaîne c s'appelle *cobord* de la cochaîne b si $c = db$, et *cocycle* si $dc = 0$. On vérifie facilement la propriété fondamentale suivante de l'opérateur d: $d \circ d = 0$. Par conséquent, le groupe $Z^n(G, M)$ de tous les cocycles de dimension n contient le sous-groupe $B^n(G, M)$ de tous les cobords des cochaînes de dimension $n+1$. Le groupe quotient

$$H^n(G, M) = Z^n(G, M)/B^n(G, M)$$

s'appelle *n-ième groupe de cohomologie* du groupe G à coefficients dans M. Si M est un anneau ou une algèbre, alors $H^*(G, M) = \bigoplus_n H^n(G, M)$ peut également être transformé en un anneau ou une algèbre (gradués).

Pour les calculs pratiques, il est plus commode de considérer au lieu de la cochaîne $c(g_0, \ldots, g_n)$ la fonction $\tilde{c}(h_1, \ldots, h_n) = c(e, h_1, h_1h_2, \ldots, h_1h_2 \ldots h_n)$ définissant uniquement la cochaîne donnée.

P r o b l è m e 1. Démontrer l'égalité

$$\widetilde{dc}(h_1, \ldots, h_{n+1}) = h_1\tilde{c}(h_2, \ldots, h_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \tilde{c}(h_1, \ldots, h_{i-1}, h_ih_{i+1}, h_{i+2}, \ldots, h_{n+1}) + (-1)^{n+1} \tilde{c}(h_1, \ldots, h_n).$$

En particulier, pour $n = 0, 1, 2, 3$ l'opérateur d s'exprime en termes des fonctions $\tilde{c}$ de la manière suivante:

$$\widetilde{dc}\,(h) = h\tilde{c} - \tilde{c},$$

$$\widetilde{dc}\,(h_1, h_2) = h_1\tilde{c}\,(h_2) - \tilde{c}\,(h_1, h_2) + \tilde{c}\,(h_1),$$

$$\widetilde{dc}\,(h_1, h_2, h_3) = h_1\tilde{c}\,(h_2, h_3) - c\,(h_1h_2, h_3) + c\,(h_1, h_2h_3) - c\,(h_1, h_2),$$

$$\widetilde{dc}\,(h_1, h_2, h_3, h_4) = h_1\tilde{c}\,(h_2, h_3, h_4) - \tilde{c}\,(h_1h_2, h_3, h_4) + \\ + \tilde{c}\,(h_1, h_2h_3, h_4) - \tilde{c}\,(h_1, h_2, h_3h_4) + \tilde{c}\,(h_1, h_2, h_3).$$

Problème 2. Démontrer que les résultats ci-dessus (sur les extensions des groupes) peuvent être formulés comme suit:

L'obstruction à la construction de l'extension est un certain élément de $H^3(G_1, C(G_0))$.

Les classes d'équivalence des extensions centrales sont indexées par les éléments de $H^2(G_1, C(G_0))$.

La méthode la plus efficace pour étudier les cohomologies des groupes consiste à considérer $H^n(G, M)$ comme un bifoncteur, contravariant par rapport à G et covariant par rapport à M.

Il existe également une relation entre les cohomologies d'un groupe et celles d'un espace topologique. Dans le cas le plus simple, lorsque G agit trivialement sur M, cette relation est de la forme:

$$H^n(G, M) = H^n(K(G, 1), M).$$

2.6. Groupes topologiques et espaces homogènes. On appelle *groupe topologique* un ensemble G qui est à la fois un groupe et un espace topologique, à condition que l'opération de groupe et la structure topologique soient liées par la condition:

l'application $G \times G \to G$: $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue.

Cette condition équivaut à l'ensemble des trois conditions suivantes, plus faciles à vérifier:

1. L'application $(x, y) \mapsto xy$ est continue en x et en y.
2. L'application $x \mapsto x^{-1}$ est continue au point $x = e$.
3. L'application $(x, y) \mapsto xy$ est continue, comme fonction de deux variables, au point (e, e).

Chaque groupe abstrait muni de la topologie discrète (tous les sous-ensembles sont ouverts) peut être considéré comme un groupe topologique. Les groupes de toutes les transformations continues des espaces topologiques concervant une certaine structure supplémentaire en sont des exemples plus intéressants. Ainsi, par exemple, on obtient le groupe des matrices non dégénérées, le groupe des transformations conformes du disque, le groupe des opérateurs unitaires dans un espace hilbertien, etc.

Les groupes topologiques forment une catégorie, dont les morphismes sont les homomorphismes continus. (On considère parfois une

classe plus restreinte de morphismes, en imposant à l'application une condition supplémentaire: être ouverte ou fermée.)

L'ensemble X s'appelle *G-espace topologique* (*à gauche*), s'il est un G-espace (à gauche) dans le sens usuel (voir **2.1**) et, en plus, possède une topologie telle que l'application

$$G \times X \to X: (g, x) \mapsto gx$$

est continue. Si l'espace X est séparé, le sous-groupe stationnaire de chaque point sera un sous-groupe fermé dans G. Inversement, si H est un sous-groupe fermé du groupe séparé G, alors l'espace G/H des classes d'équivalence à gauche, muni de la topologie quotient, sera un G-espace topologique homogène séparé. Si X est n'importe quel autre G-espace topologique, avec le même sous-groupe stationnaire, l'application naturelle $\varphi: G/H \to X$ est alors bijective et continue. Si G et X sont localement compacts [1]), φ est alors un homéomorphisme.

Par conséquent, pour les groupes et les espaces localement compacts on a une bijection entre les G-espaces topologiques homogènes et les classes d'équivalence des sous-groupes fermés.

Comme exemple de relation entre les propriétés topologiques et les propriétés de groupes, citons le fait suivant.

Problème 1. Soit G un groupe topologique connexe, Γ son sous-groupe invariant discret. Alors Γ est inclus dans le centre de G.

Indication. Considérer l'application de G dans Γ: $g \mapsto g\gamma g^{-1}$, où $\gamma \in \Gamma$.

Chaque groupe topologique peut être transformé en un espace homogène de deux manières différentes. A savoir, on peut considérer deux points x et y V-proches, où V est un voisinage de l'unité, si $xy^{-1} \in V$ (premier procédé), ou si $x^{-1}y \in V$ (deuxième procédé). Pour le premier procédé, l'opération de translation à droite sera uniformément continue, mais celle à gauche et le passage à l'élément inverse, en général, ne le sont pas. Pour le deuxième procédé, ce sont les translations à gauche qui sont uniformément continues, tandis qu'en général les translations à droite et le passage à l'élément inverse ne le sont plus.

Il est naturel d'essayer de compléter ces deux espaces homogènes et d'essayer de les munir d'une structure de groupe topologique. Il est évident que c'est possible si la condition suivante est satisfaite:

$$\left.\begin{array}{l}\text{pour chaque filet fondamental } \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}\\ \text{le filet } \{x_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A} \text{ est également fondamental.}\end{array}\right\} \quad (1)$$

---

[1]) Un espace topologique s'appelle *localement compact*, si chaque son point possède un voisinage à adhérence compacte.

Il se trouve que si cette condition est vérifiée, les deux complétés sont effectivement des groupes topologiques et sont de plus isomorphes.

En particulier, la condition (1) est satisfaite pour tous les groupes commutatifs.

Exemple 1. Soit **Q** le groupe additif des nombres rationnels, avec la topologie induite par la métrique usuelle:

$$\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

Le complété de **Q** est alors isomorphe à **R**.

Exemple 2. Munissons ce même groupe **Q** d'une autre métrique. Soit p un nombre premier. Chaque nombre rationnel peut s'écrire sous la forme $x = p^k m/n$, où les entiers m et n sont premiers avec p. Posons $\rho_p(x, y) = p^{-k}$, si $x - y = p^k m/n$.

Le complété de **Q** par rapport à cette métrique est appelé groupe des *nombres p-adiques* et désigné par $\mathbf{Q}_p$. (En fait $\mathbf{Q}_p$ est même un corps; voir § 3.)

Le complété du sous-groupe $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ pour cette métrique (qui coïncide, bien entendu, avec l'adhérence de **Z** dans $\mathbf{Q}_p$) est appelé groupe des *nombres entiers p-adiques* et désigné par $\mathbf{O}_p$.

Problème 2. Démontrer que le groupe $\mathbf{O}_p$ est compact et homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

Indication. Vérifier que chaque élément de $\mathbf{O}_p$ s'écrit d'une manière univoque sous la forme de somme infinie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$, où $0 \leqslant a_k \leqslant p - 1$, et que la convergence dans $\mathbf{O}_p$ coïncide avec la convergence par coordonnées de la suite $\{a_k\}$.

Pour conclure un autre exemple important de construction du complété. Soit G un groupe infini. Prenons comme base de voisinages de l'unité tous les sous-groupes d'indexes finis de G. Supposons que la topologie ainsi obtenue soit séparée. La condition (1) dans ce cas est satisfaite et le complété $\hat{G}$ du groupe G s'avère un groupe topologique compact. De tels groupes s'appellent *profinis*. (Ils sont les limites projectives de groupes finis.)

Problème 3. Si $\hat{G} = \mathbf{Z}$, alors $\hat{G} = \prod_p \mathbf{O}_p$.

Indication. Si la suite $\{n_k\}$ est fondamentale dans la topologie considérée, alors elle est fondamentale dans n'importe laquelle des métriques ρ_p définies plus haut, et inversement. Ceci permet de définir une inclusion de $\hat{G}$ dans $\prod_p \mathbf{O}_p$. Le fait que cette inclusion est un épimorphisme découle du « théorème des restes chinois »: *il existe un entier relatif qui possède pour toute famille finie de diviseurs premiers deux à deux des restes donnés.*

Problème 4. Démontrer que le groupe $\hat{G}$ du problème 3 peut également être obtenu comme limite projective de la famille des groupes G_n, iso-

morphes à **Z**, les indices étant ordonnés par la relation de divisibilité (cf. le problème 2 de **1**.2) et l'application de G_n dans G_m consistant à multiplier par n/m.

Pour la démonstration des faits exposés ci-dessus ainsi que pour des renseignements ultérieurs sur les groupes topologiques voir les livres de L. Pontriaguine [46] et de N. Bourbaki [5].

§ 3. ANNEAUX ET MODULES

Pour la démonstration des faits cités dans ce paragraphe, ainsi que pour des données supplémentaires voir le manuel de S. Lang [41] ou le traité de N. Bourbaki [6].

3.1. Anneaux. On appelle *anneau* un ensemble K muni de deux opérations: l'addition par rapport à laquelle K est un groupe abélien, et la multiplication, liée à l'addition par la loi de distributivité:

$$x(y+z) = xy + xz, \ (x+y)z = xz + yz.$$

On considère généralement des anneaux *associatifs*, qui satisfont à la condition $(xy)z = x(yz)$. Dans ce livre, le terme « anneau » signifiera toujours « anneau associatif ».

L'anneau K s'appelle *commutatif* si $xy = yx$ pour tous les $x, y \in K$.

Le sous-groupe $K' \subset K$ s'appelle *sous-anneau* (respectivement *idéal à gauche*, *à droite* ou *bilatère*), si $xy \in K'$ pour tous les $x \in K'$, $y \in K'$ (respectivement pour tous les $x \in K$, $y \in K'$; pour tous les $x \in K'$, $y \in K$; si l'un des éléments x, y se trouve dans K').

Si K' est un idéal bilatère, alors le groupe quotient K/K' se trouve naturellement muni d'une multiplication (les classes $x+K'$ et $y+K'$ ont évidemment pour produit la classe $xy+K'$). L'anneau ainsi construit s'appelle *anneau quotient*.

Citons quelques exemples d'anneaux que l'on rencontrera souvent dans la suite:

L'anneau **Z** des entiers relatifs.

L'anneau $\mathbf{Z}_n$ des restes modulo n (l'anneau quotient de **Z** par l'idéal formé de tous les multiples de n).

L'anneau $K[t]$ des polynômes de la variable t à coefficients dans un certain anneau K.

L'anneau $\mathrm{Mat}_n(K)$ des matrices d'ordre n à coefficients dans un anneau K.

Problème 1. Soit K un anneau fini de p éléments où p est un nombre premier. Démontrer que ou K est isomorphe à l'anneau des restes modulo p, ou bien le produit de deux éléments quelconques de K est nul.

On appelle *unité* d'un anneau tout élément de celui-ci pour lequel la multiplication (de n'importe quel côté) est la transformation identique.

Chaque anneau K peut être inclus dans un anneau K_1 unitaire (avec unité 1) de sorte que K_1 soit engendré par 1 et K; l'anneau K_1 se définit par cette propriété d'une manière unique, à isomorphisme près.

L'opération du passage de K à K_1 s'appelle *adjonction de l'unité*.

Problème 2. Démontrer que si l'anneau K contenait déjà une unité, l'anneau K_1 est alors isomorphe à la somme directe $K \oplus \mathbf{Z}$.

Indication. Soit e l'unité de K. Chaque élément de K_1 peut s'écrire sous la forme $n(1 - e) + x$, où $x \in K$, $n \in \mathbf{Z}$.

Le radical $R(K)$ d'un anneau K est une caractéristique importante de celui-ci. Dans un anneau K unitaire le radical $R(K)$ peut être défini par l'une des deux manières équivalentes ci-dessous:

1) $R(K)$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de K, différents de K;

2) $R(K)$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux à droite de K, différents de K;

3) $R(K)$ se compose des éléments $x \in K$ tels que les éléments $1 + axb$ sont inversibles quels que soient $a, b \in K$.

On peut démontrer que $R(K)$ est un idéal bilatère de K. Dans un anneau quelconque on peut définir le radical en posant

$$R(K) = R(K_1),$$

où K_1 est l'anneau obtenu par adjonction de l'unité à l'anneau K (en fait $R(K_1)$ sera toujours contenu dans K).

L'anneau K s'appelle *semi-simple* si $R(K) = \{0\}$, et *radical* si $R(K) = K$.

Problème 3. L'anneau $K/R(K)$ est semi-simple.

Problème 4. L'anneau $\mathrm{Mat}_n(K)$ est semi-simple où K est un corps.

Problème 5. Le sous-anneau $T_n(K) \subset \mathrm{Mat}_n(K)$, composé de toutes les matrices triangulaires supérieures (c'est-à-dire des matrices $\| a_{ij} \|$ telles que $a_{ij} = 0$ pour $i > j$), a pour radical l'anneau $ST_n(K)$ des matrices strictement triangulaires (c'est-à-dire des matrices $\| a_{ij} \|$ telles que $a_{ij} = 0$ pour $i \geqslant j$).

Soit A un groupe abélien. L'anneau K s'appelle *A-gradué* si en tant que groupe, il représente une somme directe de groupes K^α, $\alpha \in A$, tels que $K^\alpha \cdot K^\beta \subset K^{\alpha+\beta}$ (c'est-à-dire le produit d'un élément de K^α par un élément de K^β appartient à $K^{\alpha+\beta}$). Un anneau $\mathbf{Z}$-gradué s'appelle simplement anneau *gradué*.

Si dans un anneau K, on a une famille croissante (respectivement décroissante) de sous-groupes K_i tels que $K_iK_j \subset K_{i+j}$, on dit alors que l'anneau K est muni d'une *filtration croissante* (respectivement *décroissante*).

Il existe un foncteur naturel de la catégorie des anneaux filtrés (les morphismes étant les homomorphismes d'anneaux qui conservent la filtration), dans la catégorie des anneaux gradués (les morphismes

étant les homomorphismes d'anneaux qui conservent la graduation). Ce foncteur est désigné par gr et se construit de la manière suivante. Soit $\{K_i\}$ une filtration croissante, par exemple. Posons

$$\mathrm{gr}^i K = K_i/K_{i-1}$$

et

$$\mathrm{gr}\, K = \bigoplus_i \mathrm{gr}^i K \text{ (somme directe de groupes abéliens).}$$

La structure d'anneau gradué dans gr K sera entièrement définie si l'on sait multiplier un élément $x \in \mathrm{gr}^i K$ par un élément $y \in \in \mathrm{gr}^j K$. Soit $\tilde{x}$ un représentant de la classe x dans K_i, $\tilde{y}$ celui de la classe y dans K_j. Alors xy est la classe dans $\mathrm{gr}^{i+j} K$ contenant l'élément $\widetilde{xy} \in K_{i+j}$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier immédiatement le fait que cette définition est correcte.

Problème 6. Soit $K = \mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, K_i le sous-anneau des multiples de m^i, où m est un nombre fixe. Démontrer que gr K est isomorphe à l'anneau $\mathbf{Z}_m [t]$ avec graduation naturelle par puissances de t.

On appelle *anneau topologique* tout anneau K muni d'une topologie telle que K est un groupe topologique par rapport à l'addition, l'opération de multiplication étant continue comme fonction de deux variables. Chaque anneau topologique admet un complété. L'exemple le plus important de cette construction est le complété dit I-adique. Soit I un idéal bilatère dans K. Prenons pour base de voisinages de 0 l'ensemble $\{I^n\}$ des puissances de l'idéal I. Si $\bigcap_n I^n = \{0\}$, cette topologie est alors séparée. On l'appelle *topologie I-adique* et le complété de K dans cette topologie *complété I-adique*.

Exemple. Si $K = \mathbf{Z}$ et $I = m\mathbf{Z}$, alors le complété I-adique est l'anneau $\mathbf{Z}(m)$ appelé anneau des nombres entiers m-adiques.

Problème 7. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les diviseurs simples de m. Démontrer que l'anneau des entiers m-adiques est isomorphe à la somme directe d'anneaux des entiers p-adiques pour $p = p_1, \ldots, p_k$: $\mathbf{Z}(m) = \bigoplus_i \mathbf{O}_{p_i}$.

Problème 8. Démontrer que dans le système décimal il existe exactement quatre « nombres décimaux infinis »

$$\ldots 0\,000\,000, \quad \ldots 2\,890\,625, \quad \ldots 7\,109\,376 \text{ et } \ldots 0\,000\,001$$

possédant la propriété suivante: si les k derniers chiffres du nombre N sont les mêmes que ceux d'un de ces 4 nombres, alors une puissance quelconque du nombre N se termine par les mêmes k chiffres.

Indication. Utilisez le résultat du problème 7: $\mathbf{Z}(10) = \mathbf{O}_2 \oplus \oplus \mathbf{O}_5$, et du fait que l'anneau des entiers p-adiques ne contient pas de diviseurs de 0.

3.2. Corps. On appelle *corps* (*topologique*) tout ensemble K où l'on peut effectuer les 4 opérations arithmétiques, de sorte que:

1) par rapport à l'addition et à la multiplication K est un anneau (topologique),

2) la fonction $x \mapsto x^{-1}$ est définie (et continue) partout, sauf au point 0.

Un corps avec une multiplication commutative s'appelle *corps* commutatif, mais nous omettrons généralement le terme commutatif. Il est connu que chaque corps fini est commutatif. Nous supposons que le lecteur connaisse bien

le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels,

le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels,

le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

En outre de ces corps fondamentaux, nous définirons ici des corps suivants que nous utiliserons largement dans la suite:

le corps $\mathbf{H}$ des quaternions,

le corps $\mathbf{Q}_{\mathfrak{p}}$ des nombres $\mathfrak{p}$-adiques,

le corps $\mathbf{F}_q$ composé d'un nombre fini de q éléments,

le corps $\mathbf{K}_q$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbf{F}_q$.

Il est aisé de définir le corps $\mathbf{H}$ comme le corps des matrices complexes de la forme

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix},$$

ou des matrices réelles de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Le corps $\mathbf{Q}_{\mathfrak{p}}$ s'obtient de l'extension algébrique $\mathbf{Q}'$ du corps $\mathbf{Q}$ (de tels corps s'appellent *numériques*) en complétant dans la topologie $\mathfrak{p}$-adique, où $\mathfrak{p}$ est un certain idéal simple dans l'anneau $\mathbf{Z}'$ des entiers du corps $\mathbf{Q}'$. Ce même corps peut être obtenu par extension algébrique du corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques, où p est le nombre premier unique appartenant à l'idéal $\mathfrak{p}$.

Le corps $\mathbf{F}_q$ se définit entièrement par le nombre q, qui doit être une puissance d'un nombre premier: $q = p^n$. Dans le cas où $n = 1$ et $q = p$, on obtient le corps $\mathbf{Z}_p$ des restes modulo p. Dans le cas général, $\mathbf{F}_q$, étant l'extension algébrique du corps des restes, peut être réalisé par des matrices d'ordre n à éléments dans $\mathbf{Z}_p$. Par exemple, $\mathbf{F}_4$ se compose des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$.

Le corps $\mathbf{K}_q$ est formé des séries formelles $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k x^k$, $a_k \in \mathbf{F}_q$, avec les opérations arithmétiques usuelles.

Pour un exposé plus détaillé sur les corps ci-dessus voir, par exemple, le livre de Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch [4].

On sait bien que seuls les corps $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{K}_q$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ représentent les corps localement compacts non discrets. La démonstration de ce fait figure, par exemple, dans le livre de L. S. Pontriaguine [46].

La dualité des groupes additifs de tous les corps ci-dessus (dualité de Pontriaguine (voir § 12)) joue un rôle fondamental dans la théorie des représentations.

3.3. Modules sur anneaux. Le groupe abélien M s'appelle *module gauche* sur l'anneau K, ou, plus brièvement, *K-module à gauche*, si l'opération de multiplication des éléments de K à gauche par les éléments de M est telle que l'on a les conditions naturelles:

$$\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y, \ (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x, \ (\lambda\mu) x = \lambda (\mu x),$$

où λ, $\mu \in K$ et x, $y \in M$.

Si l'anneau K contient une unité 1, on stipule généralement la condition supplémentaire $1 \cdot x = x$.

On définit d'une manière analogue les K-modules *à droite* et les K-modules *bilatères*. Si l'anneau K est commutatif, chaque K-module à gauche se munit naturellement d'une structure de K-module à droite et de K-module bilatère.

Un sous-groupe $N \subset M$, stable par rapport à la multiplication par les éléments de K, s'appelle *sous-module*. Le groupe quotient M/N dans ce cas est également un K-module et s'appelle *module quotient*. L'ensemble de tous les K-modules à gauche (respectivement à droite, bilatères) forme une catégorie, dont les morphismes sont les homomorphismes de groupes permutables à la multiplication à gauche (respectivement à droite et de deux côtés) par les éléments de K. Nous appelerons ces morphismes *applications linéaires* ou *K-applications*, et désignerons par $\mathrm{Hom}_K (M, N)$ l'ensemble de tous les K-applications de M dans N. Au lieu de $\mathrm{Hom}_K (M, M)$ on écrit également $\mathrm{End}_K M$. On omet l'indice K s'il n'y a pas risque de confusion. Il existe, dans la catégorie des K-modules, la somme, le produit, les limites inductives et projectives d'une famille quelconque d'objets.

Pour une famille finie de K-modules $M_1, \ldots, M_n$, les opérations de somme et de produit donnent le même module M, formé de tous les n-séries $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in M_i$. Nous laissons au lecteur le soin d'introduire dans M une structure naturelle de K-module et de construire les applications $i_k: M_k \to M$ et $p_k: M \to M_k$ telles que $(M, \{i_k\})$ sera la somme, et $(M, \{p_k\})$ le produit des modules $M_1, \ldots, M_n$.

Remarquons qu'un anneau K peut être considéré comme un module à gauche, à droite et bilatère sur soi-même. La somme directe de n modules K s'appelle K-module *libre* de rang n.

Problème 1. Soit K un anneau unitaire et M un K-module droit libre de rang n. L'anneau $\mathrm{End}_k\, M$ est alors isomorphe à l'anneau $\mathrm{Mat}_n\,(K)$.

Indication. Considérer d'abord le cas $n = 1$.

Un K-module M (à gauche, à droite ou bilatère) s'appelle *simple*, s'il ne contient pas de sous-modules différents de $\{0\}$ et de M.

Problème 2. Démontrer qu'un élément $x \in K$ appartient à $R\,(K)$ si et seulement si on a $xM = \{0\}$ pour un module M à gauche simple quelconque.

Indication. Si m est un élément d'un module à gauche simple M, alors l'ensemble de tous les $x \in K$, tels que $xm = 0$, est un idéal à gauche maximal dans K.

Théorème de Jordan-Gölder. *Si le module M est muni d'une famille croissante de sous-modules $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \ldots \subset M_n = M$, tels que tous les modules quotients $N_i = M_i/M_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$ sont simples, alors les classes d'équivalence des modules $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sont définies uniquement (à ordre près) par la classe d'équivalence du module M et ne dépendent pas du choix de la famille $\{M_i\}$.*

La démonstration de ce fait découle facilement du lemme de Shur (voir § 7).

Soit M un K-module droit et N un K-module gauche. On peut alors définir le *produit tensoriel sur K* des modules M et N; on le note $M \underset{K}{\otimes} N$. Pour cela, considérons le groupe abélien $M \square N$ engendré par les symboles de la forme $m \square n$, où $m \in M$, $n \in N$. Désignons par $M \bigcirc N$ le sous-groupe de $M \square N$ engendré par les éléments de la forme

a) $(m_1 + m_2) \square n - m_1 \square n - m_2 \square n$,
b) $m \square (n_1 + n_2) - m \square n_1 - m \square n_2$,
c) $m\lambda \square n - m \square \lambda n$,

où m, m_1, $m_2 \in M$, n, n_1, $n_2 \in N$, $\lambda \in K$.

Posons $M \underset{K}{\otimes} N = M \square N / M \bigcirc N$. L'image de l'élément $m \square n \in \in M \square N$ dans $M \underset{K}{\otimes} N$ s'écrit généralement $m \underset{K}{\otimes} n$ ou simplement $m \otimes n$.

Notons que le produit tensoriel de deux K-modules est un groupe abélien dépourvu de toute structure naturelle de K-module. Néanmoins, si le module M (respectivement N) est muni d'une structure de L-module à gauche (respectivement à droite), alors le produit tensoriel s'avère muni de cette même structure. En particulier,

si K est un anneau commutatif, alors M et N sont des K-modules bilatères, et par conséquent $M \underset{K}{\otimes} N$ est un K-module bilatère.

Exemple. Chaque groupe peut être considéré comme un $\mathbf{Z}$-module, en posant $nx = x + x + \ldots + x$ (n termes) pour $n > 0$ et $nx = -(-nx)$ pour $n < 0$.

Problème 3. Calculer le produit tensoriel des groupes $\mathbf{Z}_m$ et $\mathbf{Z}_n$, considérés comme $\mathbf{Z}$-modules.

Réponse. $\mathbf{Z}_{(m,\, n)}$ où (m, n) est le P.P.C.D. des nombres m et n.

On peut également donner une définition du produit tensoriel en se servant de la notion d'objet universel. Supposons, pour simplifier, que K soit un anneau commutatif et $M_1, \ldots, M_n$ est une famille de K-modules. Considérons la catégorie dont les objets sont les applications linéaires (c'est-à-dire linéaires par rapport à chaque argument) $M_1 \times \ldots \times M_n$ (produit d'ensembles) dans un K-module M quelconque (propre à chaque objet). Les morphismes sont les diagrammes commutatifs

$$M_1 \times \ldots \times M_n \begin{array}{l} \overset{\varphi}{\nearrow} M \\ \qquad \downarrow \varphi \\ \underset{\varphi'}{\searrow} M' \end{array},$$

où φ et φ' sont des applications linéaires et ψ est une application linéaire de M dans M'. L'objet terminal universel dans cette catégorie s'appelle *produit tensoriel sur* K des modules $M_1, \ldots, M_n$.

Problème 4. Vérifier que cette définition (pour $n = 2$) est équivalente à la définition donnée plus haut.

Indication. Considérer l'application linéaire de $M_1 \times M_2$ dans $M_1 \underset{K}{\otimes} M_2$: $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2$.

Soit K un anneau commutatif et M un K-module. L'ensemble $M^* = \mathrm{Hom}_K (M, K)$ se munit naturellement d'une structure de K-module et s'appelle *module dual* au module M.

L'application $M \mapsto M^*$ est un foncteur contravariant dans la catégorie des K-modules.

Problème 5. Soient M et N des modules libres de rang fini. Vérifier s'il existe des isomorphismes naturels:

$$(M^*)^* \approx M, \quad \mathrm{Hom}_K (M, N) \approx \mathrm{Hom}_K (N^*, M^*) = M^* \underset{K}{\otimes} N,$$

$$(M \underset{K}{\otimes} N)^* \approx M^* \underset{K}{\otimes} N^*.$$

3.4. Espaces vectoriels. Si K est un corps, alors le K-module M s'appelle *espace linéaire* ou *espace vectoriel* sur K, et ses éléments s'appellent *vecteurs*.

Dans le cas où K est un corps non commutatif on emploie parfois le terme « espace linéaire à gauche (à droite) sur K » au lieu de « K-module à gauche (à droite) ».

Chaque module M sur un corps K est libre, autrement dit chaque espace vectoriel *possède une base.*

On peut montrer également que chaque base de l'espace M est de la même cardinalité appelée *dimension* de M et désignée par $\dim_K M$, ou simplement $\dim M$, s'il est clair de quel K il s'agit.

Si M et N sont des espaces vectoriels sur K, les éléments de l'espace $\mathrm{Hom}_K(M, N)$ s'appellent *opérateurs linéaires* de M dans N. Soient $\{x_\alpha\}$, $\{y_\beta\}$ des bases de M et N respectivement. Chaque opérateur linéaire A de M dans N détermine uniquement la matrice $\| a_{\alpha\beta} \|$:

$$Ax_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta. \tag{1}$$

Inversement, une matrice quelconque $\| a_{\alpha\beta} \|$ dont chaque ligne ne contient qu'un nombre fini d'éléments non nuls, détermine par la formule (1) un opérateur linéaire de M dans N.

Problème 1. Démontrer que $\dim \mathrm{Hom}_K(M, N) = \dim M \dim N$, si les deux facteurs du membre droit sont finis.

Soit A un opérateur dans un espace M de dimension finie sur le corps K. On appelle *trace* de A l'élément $\mathrm{tr}\, A \in K$, qui est l'image de A par la composée des applications

$$\mathrm{Hom}_K(M, M) \xrightarrow{\varphi} M^* \underset{K}{\otimes} M \xrightarrow{\psi} K,$$

où φ est l'isomorphisme naturel et ψ l'opérateur linéaire, correspondant à l'application bilinéaire de $M^* \times M$ dans K: $(m^*, m) \mapsto$ $\mapsto m^*(m)$.

Problème 2. Démontrer que $\mathrm{tr}\, A$ est égal à la somme des éléments de la diagonale de la matrice de l'opérateur A dans une base quelconque.

Problème 3. Si $A: M \to N$ et $B: N \to M$ sont des opérateurs linéaires dans des espaces à dimension finie, alors $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$.

Les opérations de somme directe et de produit tensoriel de deux espaces nous amènent aux notions de *somme directe* et de *produit tensoriel* de deux opérateurs. Soient $A_1 \in \mathrm{Hom}_K(M_1, N_1)$, $A_2 \in$ $\in \mathrm{Hom}_K(M_2, N_2)$. $A_1 \oplus A_2$ désigne alors l'opérateur de $M_1 \oplus M_2$ dans $N_1 \oplus N_2$ donné par la formule

$$A_1 \oplus A_2 \colon (x_1, x_2) \mapsto (A_1 x_1, A_2 x_2),$$

et $A_1 \otimes A_2$ est l'opérateur de $M_1 \otimes M_2$ dans $N_1 \otimes N_2$ donné par la formule

$$A_1 \otimes A_2 \colon x_1 \otimes x_2 \mapsto A_1x_1 \otimes A_2x_2.$$

On vérifie que, dans des bases appropriées, la matrice de l'opérateur $A_1 \oplus A_2$ est de la forme

$$\left\| \begin{matrix} a^{(1)} & 0 \\ 0 & a^{(2)} \end{matrix} \right\|,$$

où $\| a^{(1)} \|$ et $\| a^{(2)} \|$ sont les matrices des opérateurs A_1 et A_2. La matrice de l'opérateur $A_1 \otimes A_2$, dans une base appropriée, possède la propriété suivante $a_{\alpha\gamma;\beta\delta} = a^{(1)}_{\alpha\beta} \cdot a^{(2)}_{\gamma\delta}$ et se met sous forme de matrice à blocs:

$$\begin{pmatrix} a^{(1)}_{11}a^{(2)} & \dots & a^{(1)}_{1n}a^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{(1)}_{n1}a^{(2)} & \dots & a^{(1)}_{nn}a^{(2)} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a^{(2)}_{11}a^{(1)} & \dots & a^{(2)}_{1m}a^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{(2)}_{m1}a^{(1)} & \dots & a^{(2)}_{mm}a^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Problème 4. Démontrer, dans le cas de dimension finie, les égalités

$$\operatorname{tr}(A_1 \oplus A_2) = \operatorname{tr} A_1 + \operatorname{tr} A_2, \quad \operatorname{tr}(A_1 \otimes A_2) = \operatorname{tr} A_1 \cdot \operatorname{tr} A_2.$$

3.5. Algèbres. Si l'ensemble A est muni d'une structure d'anneau et d'une structure d'espace vectoriel sur le corps K, de sorte que le produit dépend linéairement des facteurs, alors on dit que A est une *algèbre sur K*, ou, plus brièvement, une *K-algèbre*.

L'ensemble de toutes les K-algèbres forme une catégorie, dont les morphismes sont des homomorphismes d'algèbres (c'est-à-dire des homomorphismes linéaires d'anneaux). En plus de la somme et du produit d'une famille quelconque d'objets, il existe, dans la catégorie des K-algèbres, le produit tensoriel d'un nombre fini d'objets.

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des K-algèbres, leur *produit tensoriel* est l'espace linéaire $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ (produit sur K) muni de la loi de multiplication suivante:

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \dots \otimes y_n) = x_1y_1 \otimes \dots \otimes x_ny_n.$$

Problème 1. Si chacune des algèbres $A_1, \dots, A_n$ est isomorphe à l'algèbre $K[t]$, leur produit tensoriel est isomorphe à l'algèbre $K[t_1, \dots, t_n]$ des polynômes de n variables à coefficients dans K.

Problème 2. Démontrer les relations

$$\mathbf{C} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{H} = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{C}), \quad \mathbf{H} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{H} = \mathrm{Mat}_4(\mathbf{R}).$$

Problème 3. Soit A une K-algèbre quelconque. Alors,

$$A \underset{K}{\otimes} \mathrm{Mat}_n(K) = \mathrm{Mat}_n(A).$$

Corollaire : $\mathrm{Mat}_n(K) \underset{K}{\otimes} \mathrm{Mat}_m(K) = \mathrm{Mat}_{mn}(K)$.

Considérons la catégorie des K-algèbres à n générateurs distingués (les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres qui envoient les générateurs distingués dans des générateurs correspondants). Cette catégorie possède un objet universel initial que l'on appelle *algèbre libre* à *n* générateurs $\mathcal{F}(n, K)$.

Problème 4. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les générateurs de $\mathcal{F}(n, K)$. Démontrer qu'une base de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(n, K)$ est composée de tous les « mots » $t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}$ y compris le « mot vide », que nous désignerons par 1.

Il est évident que si l'on désigne par $\mathcal{F}^l(n, K)$ le sous-espace engendré par tous les «mots» de longueur l, $\mathcal{F}(n, K)$ devient une algèbre graduée.

L'algèbre $\mathcal{F}(n, K)$ admet une autre interprétation utile. Notons $\mathcal{F}^1(n, K)$ par V. Alors $\mathcal{F}^l(n, K)$ s'identifie naturellement avec le produit tensoriel $V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ (l facteurs). Par conséquent l'algèbre $\mathcal{F}(n, K)$ est appelée également *algèbre tensorielle* sur V et désignée par $T(V) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} T^l(V)$. Les éléments de $T^l(V)$ s'appellent *tenseurs contravariants* de rang l sur V.

Soit V^* l'espace dual à V. Les éléments des espaces $T(V) \otimes \otimes T(V^*)$ s'appellent *tenseurs mixtes.* Plus exactement, on appelle *tenseur mixte de rang* (k, l) (ou *tenseur* k*-contravariant* et l*-covariant*) tout élément de $T^k(V) \otimes T^l(V^*)$. Les résultats du problème 5 de 3.3 montrent que cette définition équivaut à la définition classique du tenseur de rang (k, l) en tant que fonction linéaire de k vecteurs de V^* et de l vecteurs de V.

Nous dirons qu'un tenseur de $T^k(V)$ est *symétrique* (respectivement *antisymétrique*), si la fonction linéaire qu'il définit sur V^* ne change pas (respectivement change de signe) pour chaque permutation de deux arguments quelconques.

L'ensemble des tenseurs symétriques (respectivement antisymétriques), s'écrit $S(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(V)$ (respectivement $\bigwedge(V) = = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k(V)$).

Problème 5. Soit I (respectivement J) un idéal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments de la forme $xy - yx$, $x, y \in V$ (respectivement par les éléments de la forme x^2, $x \in V$). Démontrer que

$$T(V) = S(V) \oplus I = \bigwedge(V) \oplus J$$

(somme directe d'espaces vectoriels).

Le résultat de ce problème permet d'identifier $S(V)$ à $T(V)/I$, et $\bigwedge(V)$ à $T(V)/J$ et de munir donc $S(V)$ et $\bigwedge(V)$ d'une structure d'algèbre sur K. L'algèbre $S(V)$ s'appelle *algèbre symétrique* sur V.

Elle est commutative et isomorphe à l'algèbre des polynômes de n variables ($n = \dim V$). L'algèbre $\bigwedge(V)$ s'appelle *algèbre extérieure* ou *algèbre de Grassman* sur V.

L'opération de multiplication dans $\bigwedge(V)$ s'écrit généralement $x \wedge y$ et s'appelle *produit extérieur.*

Problème 6. Démontrer que $\dim \bigwedge^k(V) = C_n^k$, où $n = \dim V$ et $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ sont les coefficients binominaux.

Indication. Si $x_1, \ldots, x_n$ est une base dans V, une base dans $\bigwedge^k(V)$ est formée par les éléments $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}$, $i_1 < \ldots < i_k$.

Soit Q une *forme quadratique* sur V (c'est-à-dire $Q(x) = B(x, x)$, où B est une forme bilinéaire). On appelle *algèbre de Clifford* l'algèbre quotient $C(V, Q) = T(V)/J_Q$, où J_Q est l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x^2 - Q(x)\cdot 1$, $x \in V$.

Les structures d'algèbres de Clifford et de leurs modules sont largement utilisées en théorie des représentations et en topologie algébrique. Les problèmes suivants donnent une description de ces algèbres dans le cas particulier fondamental $K = \mathbf{R}$.

Dans un système de coordonnées approprié, la forme Q s'écrit:

$$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2, \quad p+q \leqslant n = \dim V.$$

Désignons par $C(p, q, r)$, où $r = n - p - q$ l'algèbre correspondante $C(V, Q)$.

Problème 7. Démontrer que le radical de l'algèbre $C(p, q, r)$ est engendré (comme idéal) par les éléments de base $x_{p+q+1}, \ldots, x_n$ et que l'algèbre quotient de $C(p, q, r)$ est isomorphe par rapport à son radical à $C(p, q, 0)$.

Problème 8. Etablir les isomorphismes

$$C(1, 1, 0) \otimes C(p, q, r) = C(p+1, q+1, r),$$
$$C(2, 0, 0) \otimes C(p, q, r) = C(q+2, p, r),$$
$$C(0, 2, 0) \otimes C(p, q, r) = C(q, p+2, r).$$

Indication. Soient x_1, x_2, et $y_1, \ldots, y_n$ des bases canoniques dans V_1 et V_2. Considérer dans $C(V_1, Q_1) \otimes C(V_2, Q_2)$ l'ensemble des éléments

$$x_1 \otimes 1, \ x_2 \otimes 1, \ x_1x_2 \otimes y_1, \ \ldots, \ x_1x_2 \otimes y_n.$$

Problème 9. Démontrer les relations

$$C(2, 0, 0) = C(1, 1, 0) = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}),$$
$$C(0, 2, 0) = \mathbf{H}, \quad C(1, 0, 0) = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}, \quad C(0, 1, 0) = \mathbf{C}.$$

Ainsi, pour des formes non dégénérées Q, les algèbres de Clifford sont donc des algèbres de matrices sur $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$, ou des sommes de telles algèbres. Ce fait illustre le résultat général suivant.

Théorème 1. *Toute algèbre semi-simple A à dimension finie est la somme directe d'algèbres simples* (c'est-à-dire d'algèbres qui

n'ont pas d'idéaux bilatères différents de 0 et de l'algèbre tout entière). *Chaque K-algèbre simple à dimension finie est isomorphe à* $\mathrm{Mat}_n(D)$, *où D est un corps de dimension finie sur K.*

On a également

Théorème 2. *Chaque module de dimension finie sur une algèbre semi-simple A est la somme directe de sous-modules simples. Il n'existe qu'un nombre fini (égal à 1 pour une algèbre simple) de classes d'équivalence de A-modules simples.*

On obtient une algèbre de dimension infinie très intéressante, en prenant au lieu de la forme quadratique Q une forme bilinéaire antisymétrique B et en considérant l'algèbre quotient de $T(V)$ par rapport à l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$x \otimes y - y \otimes x - B(x, y)\cdot 1, \quad x, y \in V.$$

Il est bien connu que, dans une base convenablement choisie $p_1, \ldots, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_k$, la forme B se ramène à la forme

$$B(p_i, q_j) = \delta_{ij},$$

$$B(p_i, p_j) = B(q_i, q_j) = B(p_i, r_j) = B(q_i, r_j) = B(r_i, r_j) = 0.$$

Désignerons l'algèbre correspondante par $R_{n,k}(K)$.

Problème 10. Démontrer la relation

$$R_{n_1, k_1}(K) \underset{K}{\otimes} R_{n_2, k_2}(K) = R_{n_1+n_2, k_1+k_2}(K).$$

§ 4. ÉLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

4.1. Espaces vectoriels topologiques. Un espace vectoriel L sur un corps topologique K s'appelle *espace vectoriel topologique* (*EVT*) si

1) L est un groupe topologique par rapport à l'opération d'addition;

2) l'application $K \times L \to L$: $(\lambda, x) \to \lambda x$ est continue (comme fonction de deux variables).

Les espaces vectoriels topologiques sur un corps K forment une catégorie, dont les morphismes sont les applications linéaires continues. On peut définir dans cette catégorie sommes, produits, limites projectives et inductives.

Rappelons que pour un nombre fini d'espaces, les opérations de somme et de produit coïncident dans le sens suivant.

Problème 1. Soit $\{L_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, une famille finie de *EVT*, (L, i_k) leur somme et (M, p_k) leur produit. Démontrer qu'il existe un isomorphisme $\tau: L \to M$ tel que

$$p_k \circ \tau \circ i_l = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq l, \\ 1, & \text{si } k = l. \end{cases}$$

Indication. Démontrer que pour L et M on peut prendre la réunion de toutes les collections $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in L_i$ avec la structure naturelle de *EVT*.

La catégorie *EVT* sur les corps **R** et **C** fait l'objet de l'analyse fonctionnelle classique (linéaire).

Presque tous les *EVT* que l'on rencontre dans les applications sont des *espaces localement convexes* (*ELC*). Cela veut dire qu'ils possèdent une base de voisinages de 0, composée d'ensembles convexes. Les espaces localement convexes possèdent toute une série de propriétés remarquables, dont la plus importante est l'existence d'un ensemble suffissamment varié de formes linéaires continues. Si L est un *ELC* et x un vecteur non nul de L, alors il existe une forme linéaire continue f sur L telle que $f(x) \neq 0$.

Par conséquent, chaque *ELC* peut être inclus dans l'espace des coordonnées K^α, où α est un cardinal suffisamment grand.

Il est commode de se donner une topologie dans un *ELC* à l'aide d'une famille de semi-normes. Une fonction à valeurs réelles p sur un *EVT* s'appelle *semi-norme*, si elle possède les propriétés suivantes:

1) $$p(x) \geqslant 0,$$

2) $$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),$$

3) $$p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x).$$

Si l'on y ajoute la condition

4) $$p(x) = 0 \text{ seulement si } x = 0,$$

p est alors appelée *norme*. La norme d'un vecteur x est souvent désignée par $\|x\|$.

Problème 2. Le filet $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dans un *ELC* converge vers x si, et seulement si, pour chaque semi-norme continue p, le filet réel $\{p(x_\alpha - x)\}_{\alpha \in A}$ converge à 0.

Indication. Soit U un voisinage convexe de 0 dans L. On appelle *forme de Minkovski* de ce voisinage la fonction

$$p_U(x) = \inf_{x \in \lambda U} \{|\lambda|\}.$$

Démontrer que p_U est une semi-norme continue sur L.

Une famille de semi-normes $\{p_\beta\}_{\beta \in B}$ s'appelle *définissante* s'il suffit de vérifier la condition du problème 2 uniquement pour les semi-normes de cette famille. Un *ELC* L s'appelle *normant* (*dénombrablement normant*), s'il existe une famille finie (dénombrable) de semi-normes définissantes. (Une famille finie de semi-normes peut être remplacée par une seule semi-norme — leur somme.)

Une famille quelconque de semi-normes $\{p_\beta\}_{\beta \in B}$ dans un espace vectoriel L est une famille définissante pour une certaine topologie transformant L en *ELC*.

En général, nous allons considérer des espaces complets séparés. A chaque *ELC* L on associe canoniquement un *ELC* séparé complet $\hat{L}$, que l'on peut obtenir à partir de L en factorisant par le sous-

espace L_0 (l'intersection de tous les voisinages de 0) et en complétant ensuite l'espace L/L_0.

Un *ELC* complet séparé s'appelle *espace de Banach.*

Un espace L de Banach s'appelle *espace hilbertien*, si sa norme satisfait à la « condition du parallélogramme »:

$$p(x+y)^2 + p(x-y)^2 = 2p(x)^2 + 2p(y)^2. \tag{1}$$

Problème 3. Déduire de (1) que l'expression

$$(x, y) = \frac{1}{4}[p(x+y)^2 - p(x-y)^2 + ip(x-iy)^2 - ip(x+iy)^2] \tag{2}$$

est linéaire par rapport à x, antilinéaire par rapport à y, continue comme fonction de deux variables et possède la propriété suivante: $(x, x) = p(x)^2$.

Indication. Considérer les cas $\dim L = 2$ et $\dim L = 3$.

Exemple 1. Soit $C[-1, 1]$ l'ensemble des fonctions continues sur le segment fermé $[-1, 1]$. Posons

$$p_\alpha(f) = \left[\int_{-1}^{1} |f(x)|^\alpha dx\right]^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

$$p_\infty(f) = \max |f(x)|.$$

Problème 4. Démontrer que p_α est une norme pour $1 \leqslant \alpha \leqslant \infty$.

Indication. Utiliser l'inégalité $(1+y)^\alpha \geqslant 1 + y^\alpha$ pour $y \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 1$.

Munissons $C[-1, 1]$ de la topologie τ_α en choisissant pour base des voisinages de 0 les ensembles $p_\alpha(f) \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Problème 5. Démontrer que l'espace $C[-1, 1]$ est complet par rapport à la topologie τ_∞, mais ne l'est pas pour la topologie τ_α, $0 < \alpha < \infty$.

Indication. Démontrer que la suite $f_n(x) = \operatorname{arctg}(n, x)$ est fondamentale et n'a pas de limite dans $C[-1, 1]$.

Désignons par $L^\alpha[-1, 1]$ le complété de $C[-1, 1]$ dans la topologie τ_α.

Problème 6. Démontrer que $L^2(-1, 1)$ est un espace hilbertien.

Problème 7. Démontrer que pour $0 < \alpha < 1$ il n'y a pas, dans l'espace $L^\alpha[-1, 1]$, de formes linéaires continues non nulles.

Indication. Chaque fonction $f \in C[-1, 1]$ peut être écrite sous forme d'une somme de $2N - 1$ fonctions $f_1, \ldots, f_{2N-1}$ qui satisfont aux conditions

$$|f_i| \leqslant |f|, \ f_i = 0 \text{ en dehors du segment } \left[-1 + \frac{i-1}{N}, -1 + \frac{i+1}{N}\right].$$

Utiliser le fait que chaque forme continue F sur L^α doit satisfaire à l'inégalité

$$|F(f)| \leqslant C\left(\int_{-1}^{1} |f|^\alpha dx\right)^{1/\alpha}$$

et, par conséquent,

$$|F(f)| \leqslant C \sum_{i=1}^{2N-1} \left(\int_{-1}^{1} |f_i|^{\alpha} dx \right)^{1/\alpha} \leqslant C \cdot M \cdot (2N-1)\,(2/N)^{1/\alpha}.$$

Les exemples les plus importants des EVT se construisent à l'aide de la notion de mesure. Nous n'exposerons ici que quelques éléments de la théorie de la mesure et de l'intégration, renvoyant pour les détails aux manuels [40] et [11]. D'autres renseignements peuvent être obtenus dans les livres [28] et [7].

Soit X un ensemble et B une famille de ses sous-ensembles; supposons que cette famille est fermée par rapport à l'opération de la réunion dénombrable, d'intersection et de passage au complément. Un tel système s'appelle σ-algèbre. On dit qu'une *mesure* μ est donnée sur (X, B) (ou simplement sur X, s'il n'y a pas de doutes dans le choix de B), si à chaque sous-ensemble $E \in B$ correspond un nombre μ (E) tel que

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) \text{ pour } E_1 \cap E_2 = \varnothing.$$

Les ensembles $E \in B$ s'appellent *mesurables* et $\mu(E)$ leur mesure. La mesure μ s'appelle σ-*additive*, si

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \quad \text{si } E_i \cap E_j = \varnothing \quad \text{pour } i \neq j$$

(on suppose que la série dans le membre droit converge absolument).

On admet souvent, en plus, que la mesure μ ne prend que des valeurs réelles non négatives. Nous appellerons de telles mesures *positives*. On appelle *variation* de la mesure σ-additive μ la mesure positive $|\mu|$ définie par la formule

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k)|,$$

où la borne supérieure se calcule sur toutes les décompositions de E dans une somme dénombrable de sous-ensembles disjoints mesurables E_k.

Chaque mesure μ est de la forme $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ où μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sont des mesures positives. Ces mesures peuvent être choisies de sorte à avoir les inégalités

$$\sqrt{2}\,|\mu| \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \geqslant |\mu|.$$

La mesure μ s'appelle *complète*, si des conditions

$$E_1 \in B, \quad E_2 \in B, \quad E_1 \subset E \subset E_2 \text{ et } |\mu|(E_2 \diagdown E_1) = 0$$

il découle que $E \in B$. Chaque mesure σ-additive se prolonge en une mesure complète.

Si une certaine condition est satisfaite pour tous les points $x \in X \diagdown E$ et $|\mu|(E) = 0$, nous dirons que cette condition est satisfaite pour la mesure μ *presque partout* sur X.

Supposons que l'espace X soit la réunion d'une famille de sous-ensembles disjoints deux à deux X_α, $\alpha \in A$. Si chaque X_α est muni d'une mesure μ_α, on peut alors définir une mesure dite *localement finie* $\mu = \sum_\alpha \mu_\alpha$. Par définition, le sous-ensemble E est considéré μ-mesurable, si son intersection avec X_α est μ_α-mesurable pour tout α. On appelle mesure de E la somme de la série $\sum_\alpha \mu_\alpha(E \cap X_\alpha)$, si la série $\sum_\alpha |\mu_\alpha|(E \cap X_\alpha)$ converge absolument. Sinon on

pose $\mu(E) = \infty$. Si la famille $\{X_\alpha\}$ est dénombrable, on appelle la mesure μ de *genre dénombrable.*

Parfois, on appelle les mesures localement finies tout simplement mesures, et les mesures dans le sens employé ici — mesures finies.

Une fonction complexe f sur X s'appelle *mesurable* (on dit également μ-mesurable ou B-mesurable) si pour tout ensemble ouvert $U \subset C$ l'ensemble $f^{-1}(U) \subset \subset X$ est également mesurable. Appelons une fonction f *simple* si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$

Soit μ une mesure positive (pas nécessairement finie). Si la somme

$$\sum_k \lambda_k \mu(f^{-1}\{\lambda_k\})$$

converge absolument, alors sa valeur numérique est appelée *intégrale* de f pour la mesure μ et désignée par $\int_X f(x)\,d\mu(x)$ ou plus brièvement $\int_X f\,d\mu$.

Une fonction non négative mesurable f s'appelle μ-intégrable, si l'ensemble de toutes les intégrales de la forme $\int_X g(x)\,d\mu(x)$ est majoré, où g est une fonction simple, inférieure ou égale à f. La borne supérieure de ces intégrales s'appelle intégrale de f pour la mesure μ. Une fonction complexe mesurable f s'appelle *intégrable* pour la mesure μ (non nécessairement positive), si la fonction $|f|$ est intégrable pour la mesure $|\mu|$. L'*intégrale* $\int_X f(x)\,d\mu(x)$ se détermine alors uniquement par les conditions de linéarité relativement à f et à μ, si l'on considère que, pour des f et des μ positifs, cette intégrale coïncide avec l'intégrale définie ci-dessus.

L'ensemble de toutes les fonctions μ-intégrables est un espace vectoriel L avec la semi-norme suivante

$$\|f\| = \int_X |f(x)|\,d|\mu|(x).$$

Il est évident que l'intersection L_0 de tous les voisinages de 0 se compose de fonctions presque partout nulles. On sait que l'espace quotient L/L_0 est complet par rapport à la norme correspondante. On le note $L^1(X, \mu)$.

D'une manière analogue on définit l'espace $L^p(X, \mu)$, composé des classes de fonctions f, pour lesquelles l'intégrale de $|f|^p$ pour la mesure μ est finie. Pour $1 \leqslant p < \infty$ c'est un espace de Banach avec la norme suivante:

$$\|f\| = \left| \int_X |f(x)|^p\,d|\mu|(x) \right|^{1/p}.$$

L'espace $L^\infty(X, \mu)$ se définit comme l'espace de Banach que l'on obtient en factorisant l'espace L de toutes les fonctions bornées μ-mesurables sur X avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ par le sous-espace fermé des fonctions presque partout nulles.

On dit qu'une mesure μ_1 est *absolument continue* pour la mesure μ_2 (notation: $\mu_1 \prec \mu_2$), si chaque ensemble μ_2-mesurable est également μ_1-mesurable, et si de $|\mu_2|(E) = 0$ il découle $\mu_1(E) = 0$. Dans ce cas, il existe une fonction ρ μ_2-mesurable, telle que pour une fonction f μ_1-intégrable quelconque, on a l'égalité suivante

$$\int_X f(x)\,d\mu_1(x) = \int_X f(x)\,\rho(x)\,d\mu_2(x). \tag{3}$$

La fonction $\rho(x)$ est définie uniquement presque partout pour la mesure μ_2. On l'appelle *dérivée* de la mesure μ_1 par la mesure μ_2, et on la note $d\mu_1/d\mu_2$. Si μ_1 est finie, alors la fonction $d\mu_1/d\mu_2$ est intégrable pour la mesure μ_2.

Inversement, chaque fonction ρ μ_2-mesurable (respectivement intégrable) définit une certaine mesure μ_1 (respectivement une mesure finie) par la formule (3). Cette mesure est notée $\rho\mu_2$.

Si chacune des mesures μ_1, μ_2 est absolument continue relativement à l'autre, alors ces mesures s'appellent *équivalentes* (notation: $\mu_1 \sim \mu_2$).

Remarquons que chaque mesure σ-finie est équivalente à une mesure finie. Pour des mesures équivalentes, les espaces $L^p(X, \mu_1)$ et $L^p(X, \mu_2)$ sont naturellement isomorphes: la multiplication par $|d\mu_1/d\mu_2|^{1/p}$ transforme le deuxième espace dans le premier. Les mesures μ_1 et μ_2 s'appellent *disjointes*, si des conditions $\mu_1 \succ \mu$ et $\mu_2 \succ \mu$ il découle que $\mu = 0$.

Soient X un espace localement compact et $K(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à support compact. Munissons $K(X)$ d'une topologie, en considérant que le filet $\{f_\alpha\}$ converge vers f si et seulement si toutes les f_α et f sont nulles à l'extérieur d'un certain compact $K \subset X$, et f_α converge uniformément vers f sur X. On sait que chaque forme linéaire continue sur $K(X)$ est de la forme

$$F_\mu(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x), \tag{4}$$

où μ est une certaine mesure, définie sur tous les ensembles boréliens de X, et jouissant de la propriété suivante:

pour chaque ensemble mesurable E de mesure finie et pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un compact K et un ouvert U tels que $K \subset E \subset U$ et $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$.

De telles mesures s'appellent *régulières*.

Inversement, chaque mesure régulière sur X définit par la formule (4) une forme linéaire continue sur $K(X)$.

On appelle *support* d'une mesure régulière μ, l'ensemble fermé $\operatorname{supp}\mu$ complémentaire à la réunion de tous les ensembles ouverts de mesure nulle.

Pour chaque *EVT* L, nous noterons L' l'espace *topologiquement adjoint* de L composé de toutes les formes linéaires continues sur L. L' est évidemment un sous-espace dans l'espace algébriquement adjoint $L^* = \mathrm{Hom}_K(L, K)$. Dans le cas de dimension finie, L' et L^* coïncident (si L est séparé). L'ensemble $F \subset L$ s'appelle *borné*, si pour tout voisinage U de 0, il existe un nombre $\lambda \in K$ tel que $E \subset \lambda U$. Si L est un *ELC*, alors cette condition équivaut à la condition d'être faiblement borné, ce qui veut dire que $f(E)$ est borné pour chaque $f \in L'$.

L'espace L' peut être muni, de plusieurs manières naturelles, d'une topologie localement convexe.

La *topologie faible* correspond à la convergence ponctuelle: le filet $\{f_\alpha\}$ converge vers f, si pour chaque $x \in L$ le filet numérique $f_\alpha(x)$ converge vers $f(x)$.

La *topologie forte* correspond à la convergence uniforme sur les ensembles bornés.

Si L est un espace de Banach avec norme p, alors L', muni de la topologie forte, est également un espace de Banach avec la norme

$$p'(f) = \sup_{p(x) \leqslant 1} |f(x)|.$$

Soit A un opérateur linéaire continu de L_1 dans L_2. L'opérateur adjoint $A': L_2' \to L_1'$, défini par la formule

$$[A'f](x) = f(Ax), \quad x \in L_1, \quad f \in L_2',$$

est continu, si l'on munit les deux espaces L_1' et L_2' de la topologie forte ou de la topologie faible.

Dans l'espace $\mathfrak{B}(L_1, L_2)$ de tous les opérateurs linéaires continus de L_1 dans L_2, on considère le plus souvent les trois topologies suivantes:

le filet A_α converge vers A

1) *faiblement*, si pour tous les $x \in L_1$ et $f \in L_2'$ le filet numérique $\{f(A_\alpha x)\}$ converge vers $f(Ax)$;

2) *fortement*, si pour chaque $x \in L_1$ le filet vectoriel $A_\alpha(x)$ converge vers Ax dans L_2;

3) *uniformément*, si pour chaque ensemble borné $E \subset L$ le filet $\{A_\alpha(x)\}$ converge vers Ax uniformément pour tous les $x \in E$.

Notons un certain désaccord de ces définitions (généralement admises) avec les définitions (tout aussi répandues) des topologies dans L'. Chaque forme $f \in L'$ peut être considérée comme un opérateur de L dans K. Alors, la topologie uniforme d'opérateurs correspond à la topologie forte de L', et les topologies faible et forte d'opérateurs (qui coïncident dans ce cas) correspondent à la topologie faible dans L'.

E x e m p l e 2. L'espace fortement adjoint à $L^p(X, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, est naturellement isomorphe à $L^q(X, \mu)$, où $1/q + 1/p = 1$. A savoir, chaque forme continue sur $L^p(X, \mu)$ peut s'écrire

$$F_g(f) = \int_X f(x)\, g(x)\, d\mu(x),$$

où $g \in L^q(X, \mu)$, tandis que la norme de la forme F_g coïncide avec la norme de la fonction g dans $L^q(X, \mu)$.

Citons ici sans démonstration quelques propriétés des *ELC*, dont nous nous servirons par la suite.

1 *Chaque ensemble faiblement borné et faiblement fermé est faiblement compact.*

2 (t h é o r è m e d e H a h n - B a n a c h). *Soit K un ensemble fermé convexe, qui contient un voisinage de l'origine des coordonnées. Pour chaque point $x \notin K$, il existe une forme linéaire f, telle que $f(y) \leqslant 1$ pour tous les $y \in K$* et $f(x) > 1$.

3 (t h é o r è m e d e K r e i n - M i l m a n). *Chaque ensemble compact convexe est l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrêmes.* (Un point d'un ensemble convexe K s'appelle point *extrême*, s'il n'est le centre d'aucun segment entièrement compris dans K.)

4 (t h é o r è m e d e C h o q u e t). *Soit K un ensemble compact convexe. Pour chaque point $x \in K$, il existe une mesure μ sur l'ensemble*

E des points extrêmes, telle que

$$f(x) = \int_E f(y)\, d\mu(y)$$

pour une forme continue linéaire quelconque f.

5 (théorème de Schauder-Tikhonov). *Chaque application continue d'un ensemble compact convexe K dans soi-même possède un point fixe.*

6 (théorème de Banach-Steinhaus). *Si L_1 et L_2 sont des espaces de Banach et $S \subset \mathfrak{B}(L_1, L_2)$ est une famille d'opérateurs, bornée sur chaque vecteur $x \in L_1$, alors cette famille est uniformément bornée, c'est-à-dire que $\|A\| \leqslant C$ pour tous les $A \in S$.*

La démonstration de ces faits peut être trouvée dans les livres [14], [16], [45].

Nous allons également supposer connus les théorèmes élémentaires concernant les espaces hilbertiens: le théorème du supplémentaire orthogonal, l'inégalité de Bessel et l'égalité de Parseval, l'existence d'une base orthonormée et l'isomorphisme des espaces de même dimension (c.-à-d. dont les bases sont d'une même cardinalité). Pour ces renseignements voir les manuels [40] et [11].

Soient L_1 et L_2 des espaces normés, avec des normes p_1 et p_2. Dans le produit tensoriel $L_1 \otimes L_2$ il n'existe pas, a priori, de norme canonique. On peut néanmoins indiquer une classe naturelle de normes (on les appelle *crossnormes*), qui possèdent les propriétés suivantes:

1) $p(x_1 \otimes x_2) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2), \; x_1 \in L_1, \; x_2 \in L_2,$

2) $p'(f_1 \otimes f_2) = p_1'(f_1) \cdot p_2'(f_2), f_1 \in L_1', \; f_2 \in L_2'.$

(Il est évident que chaque élément de $L_1' \otimes L_2'$ définit une forme linéaire sur $L_1 \otimes L_2$.)

Il se trouve que, parmi les crossnormes, il existe celle $p_1 \hat{\otimes} p_2$ maximale:

$$(p_1 \hat{\otimes} p_2)(z) = \inf \sum_i p_1(x_i) \cdot p_2(y_i),$$

où la borne inférieure se calcule sur toutes les représentations de z sous la forme $\sum_i x_i \otimes y_i$, et celle minimale $p_1 \check{\otimes} p_2$:

$$(p_1 \check{\otimes} p_2)(z) = \sup |f(z)|,$$

où la borne supérieure se calcule sur tous les f de la forme $f_1 \otimes f_2$, $f_i \in L_i'$ et $p_i'(f_i) \leqslant 1$, $i = 1, 2$.

Le complété de $L_1 \otimes L_2$ par rapport à ces normes sera noté $L_1 \hat{\otimes} L_2$ et $L_1 \check{\otimes} L_2$ respectivement.

Considérons le cas particulier $L_1 = L$, $L_2 = L'$. L'espace $L_1 \otimes L_2$ peut, dans ce cas, être identifié à l'espace des opérateurs linéaires de rang fini dans L: à l'élément $x \otimes f$, $x \in L$, $f \in L'$ correspond l'opérateur $y \mapsto f(y)\,x$.

Problème 8. Démontrer que la norme $p \check{\otimes} p'$ coïncide avec la norme usuelle de l'opérateur.

Dans ce cas, $L \check{\otimes} L'$ coïncide avec l'adhérence par la norme de l'espace des opérateurs de rang fini. Tous ces opérateurs sont *complètement continus* (*compacts* selon une autre terminologie), c'est-à-dire qu'ils envoient tout ensemble borné dans un ensemble relativement compact (c'est-à-dire dans un ensemble à adhérence compacte). Si L est un espace hilbertien, la réciproque est vraie : *chaque opérateur complètement continu dans L est la limite pour la norme d'opérateurs de rang fini.*

Supposons que l'application naturelle de $L \hat{\otimes} L'$ dans $L \check{\otimes} L'$ soit injective. On peut dans ce cas considérer les éléments de $L \hat{\otimes} L'$ comme des opérateurs dans L. Ils appellent opérateurs *nucléaires*. L'application $A \to \operatorname{tr} A$ (la trace de l'opérateur) se prolonge par continuité à toute la classe des opérateurs nucléaires. Dans un espace hilbertien, cette classe se compose de tous les opérateurs A, pour lesquels, dans une base orthonormée $\{x_\alpha\}$ quelconque, la somme $\sum_\alpha (Ax_\alpha, x_\alpha)$ converge. La valeur numérique de cette somme ne dépend pas du choix de la base et coïncide avec la trace de A.

Tout *ELC* admet la même définition des produits $L_1 \hat{\otimes} L_2$ et $L_1 \check{\otimes} L_2$.

Supposons que dans *ELC* L_1 la topologie est donnée par une famille de semi-normes p_α ; $\alpha \in A$, tandis que dans *ELC* L_2 par une famille de semi-normes p_β ; $\beta \in B$. Alors, on peut définir dans $L_1 \otimes L_2$ deux topologies localement convexes. L'une se définit par la famille de semi-normes $p_\alpha \hat{\otimes} q_\beta$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, et l'autre par la famille de semi-normes $p_\alpha \check{\otimes} q_\beta$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$. Les complétés de $L_1 \otimes L_2$ pour ces topologies seront désignés par $L_1 \hat{\otimes} L_2$ et $L_1 \check{\otimes} L_2$ et appelés respectivement produits tensoriels *projectif* et *faible* des espaces L_1 et L_2.

Une classe importante d'espaces *nucléaires* M est caractérisée par la propriété suivante: pour un *ELC* quelconque L les produits tensoriels $L \hat{\otimes} M$ et $L \check{\otimes} M$ coïncident.

Les espaces nucléaires possèdent toute une série de propriétés remarquables, qui les apparentent aux espaces de dimension finie. Ainsi, chaque ensemble fermé borné dans un espace nucléaire est compact, les convergences forte et faible dans un tel espace coïnci-

dent, chaque opérateur continu dont la source ou le but est un espace nucléaire se détermine entièrement par son noyau. Chaque sous-espace d'un espace nucléaire, les limites projective et inductive dénombrable d'espaces nucléaires sont également des espaces nucléaires.

Les espaces nucléaires dénombrablement normés sont les plus fréquents. Soit V un ELC avec un ensemble dénombrable de semi-normes $\{p_k\}$. Sans nuire à la généralité, on peut considérer que $p_k \leqslant p_{k+1}$ (autrement, on aurait pu remplacer $\{p_k\}$ par une famille équivalente de semi-normes $\tilde{p}_k = \sup\limits_{i \leqslant k} p_i$). Il s'avère que pour que l'espace V soit nucléaire il faut et il suffit qu'il existe pour chaque k un $j(k)$, tel que l'application identique de $(V, p_{j(k)})$ dans (V, p_k) soit un opérateur nucléaire.

Citons à titre d'exemple l'espace $S(\mathbf{R})$ des fonctions infiniment différentiables rapidement décroissantes sur la droite numérique, définies par une famille de normes

$$p_k(f) = \sup_x \sum_{l,\, m=0}^{k} |x^l f^{(m)}(x)|.$$

Pour plus de détail voir les livres [18] et [50].

Remarquons que si L_1 et L_2 sont des espaces hilbertiens, parmi les crossnormes sur $L_1 \otimes L_2$ il existe une seule norme engendrée par le produit scalaire. Le complété de $L_1 \otimes L_2$ pour cette norme s'appelle *produit tensoriel hilbertien* des espaces L_1 et L_2.

Dans le cas particulier $L_1 = L$, $L_2 = L'$, le produit hilbertien de L et L' peut être identifié à l'espace dit *des opérateurs de Hilbert-Schmidt*. On peut démontrer que l'opérateur A est un opérateur de Hilbert-Schmidt, si et seulement si AA^* est un opérateur nucléaire. La norme de l'opérateur A dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt peut être donnée par la formule

$$\| A \|^2 = \operatorname{tr}(AA^*).$$

4.2. Algèbres de Banach.

La théorie des algèbres de Banach (ou des anneaux normés si l'on s'en tient à la terminologie originale) a été créée au début des années quarante par I. M. Gelfand ; c'est un des instruments les plus puissants pour les applications à la théorie des fonctions, à la théorie des opérateurs, à la théorie des représentations des groupes et à d'autres domaines des mathématiques.

Nous exposerons ici seulement celles des notions de la théorie des algèbres de Banach qui nous seront nécessaires par la suite.

Pour un exposé systématique de ces problèmes voir les livres [8], [23], [44], [15].

Une algèbre $\mathfrak{A}$ sur le corps $\mathbf{C}$ s'appelle *algèbre de Banach*, si $\mathfrak{A}$ est à la fois un anneau topologique et un espace de Banach.

Nous supposerons que la norme donnée dans une algèbre de Banach satisfasse à la condition

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|. \tag{1}$$

Problème 1. Chaque norme à produit continu est proportionnelle à une norme qui satisfait à la condition (1).

Indication. En utilisant le principe de la borne uniforme (voir 4.1), démontrer l'inégalité $\| xy \| \leqslant C \| x \| \cdot \| y \|$.

En plus, on peut considérer que les algèbres dont il s'agit contiennent une unité 1 et $\| 1 \| = 1$. Le cas général se réduit à celui-ci par l'opération « d'adjonction de l'unité » (comparer avec 3.1).

Remarquons que dans la catégorie des algèbres sur C cette opération n'est pas la même que dans celle des anneaux. Dans notre cas, la nouvelle algèbre $\mathfrak{A}_1$ se compose d'éléments de la forme $\lambda \cdot 1 + x$, où $x \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, tandis que 1 est l'unité adjointe. Pour norme dans $\mathfrak{A}_1$ on peut prendre l'expression $\| \lambda \cdot 1 + x \| = | \lambda | + \| x \|$.

On appelle *spectre* d'un élément $x \in \mathfrak{A}$ l'ensemble Sp x de tous les nombres complexes λ pour lesquels l'élément $x - \lambda \cdot 1$ n'est pas inversible dans $\mathfrak{A}$.

Problème 2. Démontrer que Sp x est contenu dans un disque de centre 0 et de rayon $\| x \|$.

Indication. Si $| \lambda | > \| x \|$, alors pour $(x - \lambda \cdot 1)^{-1}$ on peut prendre la valeur numérique de la somme $- \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda^{-n-1}$.

La fonction $R_x(\lambda) = (x - \lambda \cdot 1)^{-1}$, définie sur le complément de Sp x, à valeurs dans l'algèbre $\mathfrak{A}$, s'appelle *résolvante* de l'élément x.

Problème 3. Démontrer que Sp x est un ensemble fermé et que $R_x(\lambda)$ est une fonction analytique de λ sur le complément de Sp x.

Indication. Démontrer que la somme $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_x(\lambda_0)^{n+1}$, qui converge dans le disque $| \lambda - \lambda_0 | < \| R_x(\lambda_0) \|^{-1}$, est une résolvante de l'élément x.

Problème 4. Démontrer que Sp x est un sous-ensemble compact non vide de C.

Indication. Si Sp $x = \varnothing$, alors $R_x(\lambda)$ est définie et bornée sur tout le plan complexe. Appliquer le théorème de Liouville aux fonctions numériques $f(R_x(\lambda))$, $f \in \mathfrak{A}'$.

Corollaire (théorème de Gelfand-Mazur). *Chaque corps de Banach sur* **C** *coïncide avec* **C**.

En effet, si ce corps contient l'élément $x \notin \mathbf{C}$, alors Sp $x = \varnothing$.

Le nombre réel $\rho(x) = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, x} | \lambda |$ s'appelle *rayon spectral* de l'élément x.

Problème 5. Démontrer que $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n}$.

Indication. Considérer le développement de $R_\lambda(x)$ en une série de Taylor au point $\lambda = \infty$.

Remarque. Il peut paraître étrange que la valeur numérique de $\rho(x)$, uniquement déterminée par la structure algébrique sur $\mathfrak{A}$, s'exprime pourtant en fonction d'une norme choisie très arbitrairement. Néanmoins, d'après le théorème de Banach (voir 4.1), deux normes qui définissent une même topologie sur $\mathfrak{A}$ sont liées par la relation

$$0 < c_1 \leqslant \frac{\| x \|_1}{\| x \|_2} \leqslant c_2 < \infty.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\| x^n \|_1}{\| x^n \|_2} \right)^{1/n} = 1.$$

Problème 6. Démontrer que si $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach et $\varphi(1) = 1$, alors

$$\rho(\varphi(x)) \leqslant \rho(x).$$

Indication. Les éléments inversibles se transforment en éléments inversibles.

Pour un polynôme quelconque $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ à coefficients complexes et pour $x \in \mathfrak{A}$ quelconque, on peut définir l'élément $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathfrak{A}$.

Il se trouve que la correspondance $P \mapsto P(x)$ peut être prolongée dans une classe de fonctions plus large.

Soit $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\, x)$ l'algèbre des fonctions analytiques définies dans un certain voisinage (propre à chaque fonction) de l'ensemble $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{C}$, muni de la convergence uniforme sur les compacts.

Il existe alors un homomorphisme continu $f \mapsto f(x)$ de l'algèbre $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\, x)$ dans $\mathfrak{A}$, qui prolonge l'homomorphisme de l'algèbre des polynômes décrit plus haut. L'élément $f(x)$ peut être calculé à l'aide de la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C f(\lambda) R_x(\lambda)\, d\lambda,$$

où C est une courbe fermée quelconque, située dans l'ensemble de définition de f et renfermant dans son intérieur l'ensemble $\mathrm{Sp}\, x$.

D'une manière analogue, quoique techniquement plus difficile, on peut définir $f(x_1, \ldots, x_n)$, où $\{x_i\}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{A}$ permutables deux à deux, tandis que f est une fonction analytique de n variables complexes, définie dans le voisinage d'un certain ensemble $\mathrm{Sp}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbf{C}^n$, appelé spectre simultané de la famille $\{x_i\}$. Une définition exacte en sera donnée plus loin.

La classe la plus importante et la mieux étudiée des algèbres de Banach est celle des algèbres de Banach commutatives.

A chaque telle algèbre $\mathfrak{A}$, on associe l'ensemble $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ de ses idéaux maximaux, différents de $\mathfrak{A}$.

Ce même ensemble $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ peut être défini comme l'ensemble de tous les caractères non nuls de $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire des homomorphismes continus de $\mathfrak{A}$ sur $\mathbf{C}$. En effet, si $\chi: \mathfrak{A} \to \mathbf{C}$ est un caractère, alors $\chi^{-1}(0)$ est un idéal maximal de $\mathfrak{A}$. Inversement, si J est un idéal maximal dans $\mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{A}/J$ est un corps de Banach sur $\mathbf{C}$ et, d'après le théorème de Gelfand-Mazur, on a $\mathfrak{A}/J = \mathbf{C}$. Par conséquent, la projection canonique $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/J$ donne un caractère de $\mathfrak{A}$.

L'interprétation des points $\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ comme caractères de $\mathfrak{A}$ permet de faire correspondre à chaque élément $x \in \mathfrak{A}$ une fonction $\hat{x}$ sur $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$:

$$\hat{x}(\chi) = \chi(x). \tag{2}$$

La fonction $\hat{x}$ s'appelle *transformation de Gelfand* de l'élément x.

L'ensemble $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ se munit de la topologie la plus faible pour laquelle les fonctions $\hat{x}$, $x \in \mathfrak{A}$ sont continues.

Problème 7. Démontrer que $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ est un compact.

Indication. $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ est un sous-ensemble borné et faiblement fermé de l'espace de Banach $\mathfrak{A}'$, adjoint à $\mathfrak{A}$.

Problème 8. Démontrer que l'ensemble des valeurs de la fonction $\hat{x}$ coïncide avec le spectre de l'élément x.

Indication. Chaque élément non inversible est contenu, d'après le lemme de Zorn, dans un idéal maximal.

Corollaire 1. *Pour chaque $x \in \mathfrak{A}$, on a l'égalité*

$$\rho(x) = \sup_{\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})} |\hat{x}(\chi)|.$$

Corollaire 2. *La transformation de Gelfand est un homomorphisme continu de $\mathfrak{A}$ dans l'algèbre $C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$* de toutes les fonctions continues sur $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Le résultat du problème 8 nous suggère la définition ci-dessous.

On appelle *spectre simultané* des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ l'image de $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ dans $\mathbf{C}^n$ par l'application

$$\chi \mapsto (\chi(x_1), \ldots, \chi(x_n)).$$

Exemple 1. Soit $\mathfrak{A} = C(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur le compact X.

Problème 9. Chaque idéal fermé $J \subset C(X)$ se compose de toutes les fonctions s'annulant sur un certain sous-ensemble fermé $Y \subset X$.

Ainsi, les idéaux maximaux de $\mathfrak{A}$ correspondent aux points de X. L'espace $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ coïncide avec X, et la transformation de Gelfand est identique.

Exemple 2. Soit $\mathfrak{A} = l^1$ l'espace des suites sommables $x = (x_0, x_1, \ldots)$ pour la norme $\|x\| = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ avec l'addition

usuelle et la multiplication donnée par la formule

$$(xy)_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Problème 10. L'espace $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ est homéomorphe au disque $|z| \leqslant 1$, $z \in C$. Démontrer que la transformation de Gelfand est de la forme

$$\hat{x}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i.$$

Exemple 3. Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec les opérations et la norme usuelles. On vérifie directement que $\mathfrak{A}$ possède un caractère unique $\chi\colon \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mapsto \lambda$. L'espace $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ se compose d'un seul point, et la transformation de Gelfand est donnée par le caractère χ.

Problème 11. Démontrer que le radical de l'algèbre $\mathfrak{A}$ (voir 3.1) se compose de tous les éléments x pour lesquels $\rho(x) = 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$ et $\hat{x} \equiv 0$.

Corollaire. *Si $\mathfrak{A}$ est une algèbre semi-simple, elle est isomorphe*[1] *à une sous-algèbre* de $C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$.

En effet, dans ce cas, la transformation de Gelfand sera une inclusion. Nous verrons plus loin, que dans le cas particulier important des C^*-algèbres, ce plongement sera un isomorphisme.

Nous dirons qu'une algèbre de Banach $\mathfrak{A}$ est munie d'une *involution*, si à chaque $x \in \mathfrak{A}$ correspond un élément $x^* \in \mathfrak{A}$, de sorte que

1) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} x^*$ (le trait indique le nombre complexe conjugué),

2 $(xy)^* = y^* x^*$,

3) $(x^*)^* = x$,

4) l'application $x \mapsto x^*$ est continue.

Un élément $x \in \mathfrak{A}$ s'appelle *hermitien*, si $x^* = x$, *normal*, si $x^*x = xx^*$, et *unitaire*, si $x^*x = xx^* = 1$.

Les algèbres de Banach à involution forment une catégorie, dont les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres permutant à l'involution.

Comme exemple d'algèbres de Banach à involution, citons l'algèbre $\mathfrak{B}(H)$ de tous les opérateurs continus dans l'espace hilbertien H, la norme étant la norme usuelle d'un opérateur et l'involution le passage à l'opérateur adjoint.

---

[1]) Isomorphe comme algèbre, mais en général, non isomorphe comme algèbre de Banach.

Un morphisme φ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans l'algèbre $\mathfrak{B}(H)$ s'appelle en général *représentation opératoire* de l'algèbre $\mathfrak{A}$. Pour souligner qu'il s'agit d'un morphisme dans la catégorie des algèbres à involution, on se sert de l'expression *$*$-représentation* ou *représentation symétrique*.

La représentation φ s'appelle *exacte* si $\ker \varphi = 0$, c'est-à-dire si φ est un monomorphisme. Les représentations φ_i dans les espaces H_i, $i = 1, 2$ s'appellent *équivalentes* s'il existe un isomorphisme τ: $H_1 \to H_2$, tel que pour $x \in \mathfrak{A}$ quelconque, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\varphi_1(x)} & H_1 \\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau \\ H_2 & \xrightarrow{\varphi_2(x)} & H_2 \end{array}.$$

4.3. C^*-algèbres.

Le problème de l'existence des représentations exactes pour les algèbres à involution a été résolu par I. M. Gelfand et M. A. Naimark. Cette solution a dégagé une classe spéciale d'algèbres de Banach, dites C^*-algèbres.

L'algèbre $\mathfrak{A}$ à involution s'appelle C^*-algèbre [1]), si l'on a la condition

$$\| x^*x \| = \| x \|^2, \text{ quel que soit } x \in \mathfrak{A}.$$

Il est évident que l'algèbre $\mathfrak{B}(H)$ est une C^*-algèbre.

Théorème 1 (Gelfand-Naimark). 1) *Chaque C^*-algèbre admet une représentation opératoire exacte.* 2) *Pour chaque algèbre de Banach $\mathfrak{A}$ à involution, il existe une C^*-algèbre $C^*(\mathfrak{A})$ et un morphisme φ: $\mathfrak{A} \to C^*(\mathfrak{A})$, tels que chaque représentation opératoire φ_1 de l'algèbre $\mathfrak{A}$ est de la forme $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \varphi$, où φ_2 est une représentation de $C^*(\mathfrak{A})$.*

Avant de démontrer ce théorème, citons quelques propriétés importantes des C^*-algèbres.

Problème 1. Si x est un élément hermitien de la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$, alors $\rho(x) = \| x \|$.

Indication. Utiliser le fait que $\| x^{2n} \| = \| x \|^{2n}$ et le résultat du problème 5 de 4.2.

Problème 2. Si φ: $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ est un morphisme de C^*-algèbres, alors $\| \varphi(x) \| \leq \| x \|$.

Indication. Utiliser les résultats du problème 6 de 4.2.

Corollaire. Dans chaque C^*-algèbre, la norme se définit uniquement.

Problème 3. Si a et u sont des éléments hermitien et unitaire respectivement de la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$, alors $\operatorname{Sp} a \subset \mathbf{R}$, $\operatorname{Sp} u \subset \mathbf{T}$ (le cercle unité dans $\mathbf{C}$).

---

[1]) On emploie également les termes: *algèbre complètement régulière, algèbre stellaire.*

Indication. Puisque chaque opérateur normal (en particulier, hermitien ou unitaire) et toutes les fonctions de cet opérateur sont contenus dans une C^*-sous-algèbre commutative $\mathfrak{A}$, on peut donc considérer $\mathfrak{A}$ commutative. Pour un élément unitaire, le résultat du problème découle du problème 8 de 4.2.

Pour un élément hermitien a, utiliser le fait que l'élément $e^{ita} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ita)^k}{k!}$ est unitaire pour chaque $t \in \mathbf{R}$.

Corollaire. *La transformation de Gelfand pour une C^*-algèbre commutative $\mathfrak{A}$ est un prolongement isométrique de $\mathfrak{A}$ dans* $C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$.

En effet, cette affirmation découle du résultat du problème 1 et la permutabilité à l'involution découle du fait que les éléments hermitiens deviennent des fonctions réelles.

On a, en fait,

Théorème 2 (Gelfand). *La transformation de Gelfand d'une C^*-algèbre commutative $\mathfrak{A}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur* $C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$.

Problème 4. Soient $\mathfrak{A}$ une C^*-sous-algèbre fermée de l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur le compact X, a un élément hermitien de $\mathfrak{A}$ et f une fonction continue sur $\operatorname{Sp} a \subset \mathbf{R}$. Alors $f(a) \in \mathfrak{A}$.

Indication. Chaque fonction continue f sur le compact $\operatorname{Sp} a \subset \mathbf{R}$ peut être approchée uniformément par des fonctions linéaires par morceaux. La fonction linéaire par morceaux s'obtient de la fonction $x \mapsto |x|$ par des opérations linéaires et par composition.

Enfin, la fonction $x \mapsto |x|$ sur le segment $[-N, N]$ peut être représentée par une série uniformément convergente

$$|x| = N\sqrt{1-\left(1-\frac{x^2}{N^2}\right)} = N - N\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}\left(1-\frac{x^2}{N^2}\right)^k.$$

Du résultat du problème 4 il découle, en particulier, que si l'algèbre $\mathfrak{A}$ sépare les points x et y, il existe une fonction $a \in \mathfrak{A}$, égale à l'unité dans un certain voisinage de x, nulle dans un certain voisinage de y, et comprise entre 0 et 1 dans les autres points. Si l'algèbre $\mathfrak{A}$ sépare n'importe quels deux points, alors pour chaque point x et son voisinage U quelconque il existe une fonction $a \in \mathfrak{A}$, égale à 1 au point x et nulle à l'extérieur de U.

D'où l'on peut déduire facilement le théorème suivant fort important.

Théorème 3 (Stone-Weierstrass). *Si $\mathfrak{A}$ est une C^*-sous-algèbre fermée avec unité dans l'algèbre $C(X)$, et les éléments de $\mathfrak{A}$ séparent les points du compact X, alors $\mathfrak{A} = C(X)$.*

Le théorème 2 découle du théorème 3 et des définitions du spectre et de la transformation de Gelfand.

Le corollaire ci-dessous est d'importance particulière.

Corollaire. *Si a est un élément hermitien d'une C^*-algèbre $\mathfrak{A}$, et* $\operatorname{Sp} a \subset \mathbf{R}^+$ (le demi-axe positif), *alors il existe un seul élément $b \in \mathfrak{A}$, jouissant des propriétés*: $\operatorname{Sp} b \subset \mathbf{R}^+$ *et* $b^2 = a$.

Autrement dit, il existe une seule racine carrée positive d'un élément positif.

Revenons au théorème 1. Les deux parties de ce théorème se démontrent par une construction explicite, où le rôle fondamental revient à la notion de forme positive.

La forme $f \in \mathfrak{A}'$ s'appelle *positive*, si $f(x^*x) \geqslant 0$ pour tous les $x \in \mathfrak{A}$.

Problème 5. Démontrer que chaque forme positive satisfait aux inégalités

a) $|f(x)|^2 \leqslant f(x^*x) \cdot f(1)$,

b) $|f(x)| \leqslant \|x\| \cdot f(1)$.

Indication. Pour démontrer a) appliquer l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski $|(x, y)|^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$ au produit scalaire

$$(x, y) = f(y^*x). \qquad (1)$$

L'inégalité b) découle de a) et du fait que $\mathrm{Sp}\,(\|x^*x\| \cdot 1 - x^*x) \subset \mathbf{R}^+$ et, par conséquent, $\|x^*x\|\, f(1) - f(x^*x) \geqslant 0$.

Si φ est une représentation de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans l'espace H et ξ un vecteur de H, alors $f_\xi(x) = (\varphi(x)\,\xi, \xi)$ est une forme positive. Il est à noter que chaque forme positive peut être obtenue de cette manière. En effet, munissons $\mathfrak{A}$ d'un produit scalaire par la formule (1). Soit H_f l'espace hilbertien correspondant. L'application $y \mapsto xy$ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ se prolonge en un opérateur $\varphi(x)$ de H_f. L'homomorphisme

$$\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(H_f)$$

est permutable à l'involution, puisque

$$(\varphi(x)\, y, z) = f(z^*xy) = (y, \varphi(x^*)\, z).$$

Nous avons obtenu une représentation de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans l'espace H_f. Si l'on prend pour ξ l'image de $1 \in \mathfrak{A}$ dans H_f, on aura $f_\xi(x) = (\varphi(x)\,\xi, \xi) = f(x)$.

L'existence d'une représentation exacte de la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ découle du fait suivant.

Lemme. *Pour chaque $x \neq 0$ d'une C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ il existe une forme positive f, telle que $f(x) \neq 0$.*

En effet, la somme directe des représentations construites pour toutes les formes positives de la manière exposée ci-dessus possède un noyau nul.

Pour démontrer le lemme, désignons par P l'ensemble de tous les éléments hermitiens de $\mathfrak{A}$ dont le spectre appartient à $\mathbf{R}^+$.

Problème 6. Démontrer que: 1) P est un cône convexe fermé, 2) 1 est un point intérieur de P, 3) $P \cap -P = \{0\}$.

Indication. Utiliser le corollaire du théorème de Gelfand.

Considérons maintenant l'ensemble convexe K composé de tous les points de la forme $1 - y$, $y \in P$. Si $\| x \| > 1$, alors $x^*x \bar{\in} K$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme $f \in \mathfrak{A}'$ aux propriétés suivantes:

$$f(y) \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad y \in K \quad \text{et} \quad f(x^*x) > 1.$$

La première propriété signifie que $f(1 - y) \leqslant 1$ pour un $y \in P$ quelconque d'où il s'ensuit que f est une forme positive. Le lemme est démontré.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème de Gelfand-Naimark, posons pour $x \in \mathfrak{A}$

$$\| x \|_1 = \sup \sqrt{f(x^*x)},$$

où la borne supérieure se prend sur toutes les formes positives qui satisfont à la condition $f(1) = 1$.

Problème 7. Démontrer que l'algèbre $C^*(\mathfrak{A})$ s'obtient de $\mathfrak{A}$ en factorisant par l'idéal tous les x pour lesquels $\| x \|_1 = 0$ et en complétant ensuite par rapport à cette norme.

Indication. Soit $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un morphisme de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans une C^*-algèbre $\mathfrak{B}$ quelconque. Démontrer par la méthode de solution du problème 2, que $\| \varphi(x) \| < \| x \|_1$.

Exemple 1. Si $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre, on a $C^*(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$.

Exemple 2. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre commutative à involution. Appelons l'idéal maximal $\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ *symétrique*, si $\hat{x}^*(\chi) = \overline{x(\chi)}$ pour un $x \in \mathfrak{A}$ quelconque. L'ensemble des idéaux symétriques maximaux forme un sous-ensemble compact $X_0 \subset X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Problème 8. Démontrer que $C^*(\mathfrak{A})$ est isomorphe à $C(X_0)$, et que le morphisme $\varphi: \mathfrak{A} \to C^*(\mathfrak{A})$ s'obtient comme composition de la transformation de Gelfand et de la restriction sur X_0.

Indication. Chaque idéal symétrique définit un caractère χ, qui est une $*$-représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathbf{C}$. Par conséquent, χ est de la forme $\chi_0 \circ \varphi$, où χ_0 est un certain caractère de $C^*(\mathfrak{A})$.

4.4. Algèbres opératoires commutatives. Appliquons les notions relatives aux algèbres de Banach exposées ci-dessus à l'étude des algèbres d'opérateurs dans un espace hilbertien.

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre d'opérateurs commutative dans l'espace hilbertien H. Nous allons supposer que $\mathfrak{A}$ soit *symétrique*, c'est-à-dire qu'elle contienne, avec chaque opérateur A, l'opérateur adjoint A^*. Si $\mathfrak{A}$ est fermée pour la norme, alors $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre commutative. Nous allons supposer que $\mathfrak{A}$ contient un opérateur unité 1. Alors, d'après les résultats de **4.3**, elle est isomorphe à l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur le compact $X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$. Appelons de telles algèbres $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ dans les espaces H_1 et H_2 *spatialement*

isomorphes s'il existe un tel isomorphisme isométrique $\tau: H_1 \to H_2$ que l'application $a \mapsto \tau a \tau^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{A}_1$ sur $\mathfrak{A}_2$. Nous donnerons, pour chaque compact X, une classification (à un isomorphisme spatial près) de toutes les algèbres d'opérateurs, étant, comme C^*-algèbres, isomorphes à $C(X)$.

Il est néanmoins plus commode de considérer un problème plus général, le problème de description de toutes les représentations de la C^*-algèbre $\mathfrak{A} = C(X)$ en question à équivalence près. Il est clair qu'une telle classification des représentations exactes permet de résoudre le problème de la classification spatiale des algèbres isomorphes à $C(X)$.

Avant de résoudre notre problème dans le cas général considérerons le cas particulier, où X se compose d'un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_k$ et l'espace H est à dimension finie.

L'algèbre $C(X)$ est isomorphe dans ce cas à la somme directe de k exemplaires du corps **C**.

Soient e_i les fonctions sur X, égales à 1 au point x_i et nulles dans tous les autres points. Puisque $e_i^* = e_i^2 = e_i$, $e_ie_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\sum_{i=0}^{k} e_i = 1$, pour chaque représentation de l'algèbre $\mathfrak{A}$ les éléments e_i sont envoyés dans des opérateurs E_i, tels que $E_i^* = E_i^2 = E_i$, $E_iE_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^{k} E_i = 1$.

Problème 1. Démontrer que les opérateurs E_i sont des opérateurs de projection orthogonale sur des sous-espaces $H_i \subset H$ orthogonaux deux à deux tels que $\bigoplus_{i=1}^{k} H_i = H$.

Il est évident que les nombres $n_i = \dim H_i$ sont des invariants de la représentation et que pour chaque suite $(n_1, \ldots, n_k)$ d'entiers non négatifs, il existe une seule (à équivalence près) représentation d'algèbre à valeurs considérées de ces invariants.

Ainsi, pour classifier les représentations de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans le cas de dimension finie il faut se donner sur l'ensemble $X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ une fonction de multiplicité $n(x)$ aux valeurs entières non négatives. Les représentations exactes correspondent aux fonctions de multiplicité partout positives.

Pour décrire la situation dans le cas de dimension infinie, faisons appel à certaines notions de la théorie de la mesure (voir **4.1**). Soit μ une mesure positive régulière sur X. L'opérateur de multiplication par une fonction continue a dans $C(X)$ peut être prolongé à un opérateur continu dans $L^2(X, \mu)$ que nous désignerons par $\varphi_\mu(a)$. Il est évident que la correspondance $a \mapsto \varphi_\mu(a)$ est une $*$-représentation de l'algèbre $C(X)$ dans l'espace $L^2(X, \mu)$.

Si les mesures μ et ν sont équivalentes, l'opérateur de multiplication par $(d\mu/d\nu)^{1/2}$ établit l'équivalence des représentations φ_μ et φ_ν.

Inversement, supposons que les représentations φ_μ et φ_ν soient équivalentes et que l'opérateur $\tau: L^2(X, \mu) \to L^2(X, \nu)$ établisse cette équivalence. Posons $f_0 \equiv 1$ et $\alpha = \tau(f_0)$. Pour une fonction continue quelconque f nous avons

$$\tau(f) = \tau\varphi_\mu(f) f_0 = \varphi_\nu(f) \tau f_0 = \varphi_\nu(f) \alpha = f\alpha.$$

Le fait que τ est isométrique entraîne l'égalité $d\mu = |\alpha|^2 d\nu$. Par conséquent, la mesure μ est absolument continue pour la mesure ν et $d\mu/d\nu = |\alpha|^2$. D'une manière analogue, l'étude de l'opérateur $\tau^{-1}: L^2(X, \nu) \to L^2(X, \mu)$ nous amène à conclure que ν est absolument continue pour μ. Les mesures μ et ν sont donc équivalentes.

En raisonnant d'une manière analogue, on peut démontrer le fait utile suivant.

Problème 2. Chaque opérateur continu dans $L_2(X, \mu)$, permutable aux opérateurs de $\varphi_\mu(f)$, est un opérateur de multiplication par une certaine fonction de $L^\infty(X, \mu)$.

Ceci implique en particulier que tous ces opérateurs sont permutables deux à deux.

La représentation φ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans l'espace H s'appelle *cyclique*, si H contient un vecteur ξ, tel que l'espace des vecteurs de la forme $\varphi(a)\xi$, $a \in \mathfrak{A}$ est dense dans H. Le vecteur ξ s'appelle dans ce cas *vecteur cyclique* ou *source*.

Il est clair que toutes les représentations φ_μ construites ci-dessus dans les espaces $L_2(X, \mu)$ sont cycliques avec source $f_0(x) \equiv 1$.

Problème 3. Démontrer que dans le cas de dimension finie seules les représentations pour lesquelles tous les invariants n_i valent 0 ou 1 seront cycliques.

Ainsi, les représentations φ_μ construites plus haut ne sont évidemment pas toutes les représentations possibles de l'algèbre $\mathfrak{A}$. Nous démontrerons néanmoins que chaque représentation cyclique φ est équivalente à l'une des représentations φ_μ. En effet, soient H l'espace où agit φ et ξ la source de H. Définissons une forme linéaire continue sur $\mathfrak{A} = C(X)$ en posant

$$F(a) = (\varphi(a)\xi, \xi).$$

Comme nous avons noté plus haut, F s'écrit

$$F(a) = \int_X a(x)\, d\mu(x),$$

où μ est une certaine mesure σ-additive sur X. La forme F prend des valeurs non négatives sur les fonctions non négatives, car si

$a \geqslant 0$, alors $a = a_1^2$, où a_1 est une fonction réelle, et

$$(\varphi(a)\xi, \xi) = (\varphi(a_1^2)\xi, \xi) = (\varphi(a_1)\xi, \varphi(a_1)\xi) \geqslant 0.$$

Par conséquent, la mesure μ est positive. Enfin, l'application de $C(X)$ dans H, donnée par la formule $a \mapsto \varphi(a)\xi$, se prolonge à un opérateur unitaire $\tau: L^2(X, \mu) \to H$ qui établit l'équivalence entre φ_μ et φ.

Problème 4. Soit φ la représentation d'une C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ dans un espace hilbertien H. Il existe une décomposition de H en une somme directe de sous-espaces $H_\alpha, \alpha \in A$, invariants par rapport à $\varphi(\mathfrak{A})$ telle que la restriction des opérateurs de représentation à chaque H_α est une représentation cyclique

Indication. Appliquer le lemme de Zorn à la famille des sous-espaces de H admettant la décomposition en somme de sous-espaces cherchés.

Remarquons que la décomposition de la représentation φ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ en somme de représentations cycliques $\varphi_\alpha = \varphi_{\mu_\alpha}$, de même que la famille de mesures μ_α sur $X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ qu'elle engendre, ne se déterminent pas de façon unique.

Dans le cas où la somme contient une quantité dénombrable ou finie de termes (par exemple, si l'espace H est séparable), nous supposerons qu'il existe une décomposition de φ en une somme de représentations cycliques $\varphi_i = \varphi_{\mu_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, pour laquelle la mesure μ_{k+1} est absolument continue pour la mesure μ_k, $k = 1, 2, \ldots$

Les mesures μ_k sont, dans ce cas, définies par la représentation donnée φ à équivalence près. La mesure μ_1 s'appelle alors *mesure de base* de la représentation φ.

Ainsi, la représentation φ est caractérisée par une famille « décroissante » de classes de mesures sur l'espace X. Cet objet peut être également décrit d'une autre manière. Soient ρ_k les mesures dérivées de μ_k par μ_1. Définissons sur X une *fonction de multiplicité n*, en posant $n(x)$ égal à la borne supérieure de tous les k pour lesquels $\rho_k(x) > 0$. Il est évident que la fonction de multiplicité est mesurable, définie uniquement presque partout pour la mesure μ_1 et permet de retrouver toutes les mesures μ_k à une équivalence près.

Soient μ une mesure σ-additive quelconque sur X et n une fonction μ-mesurable quelconque, qui prend les valeurs $1, 2, \ldots, \infty$. Posons $H_1 = L^2(X, \mu)$ et notons H_k le sous-espace de H_1, composé de toutes les fonctions qui s'annulent en dehors de l'ensemble X_k, où $n(x) \geqslant k$. Dans la somme directe $H = \bigoplus_{k=1}^{k=\infty} H_k$, définissons une représentation $\varphi_{\mu, n}$ de l'algèbre $\mathfrak{A} = C(X)$ en prenant pour $\varphi_{\mu, n}(a)$ l'opérateur de multiplication par la fonction a.

Problème 5. Démontrer que la mesure μ est une mesure de base, tandis que la fonction n est une fonction de multiplicité pour la représentation $\varphi_{\mu, n}$. La représentation $\varphi_{\mu, n}$ est exacte si et seulement si $\operatorname{supp} \mu = X$.

Théorème 1. *Chaque représentation φ de la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$, que l'on peut mettre sous forme d'une somme dénombrable ou finie de représentations cycliques, est équivalente à une représentation de la forme $\varphi_{\mu, n}$. Les représentations $\varphi_{\mu, m}$ et $\varphi_{\nu, n}$ sont équivalentes si et seulement si les mesures μ et ν le sont aussi, et les fonctions m et n coïncident presque partout.*

La démonstration de ce théorème sera faite par étapes. (Pour une autre démonstration possible voir le livre de J. Dixmier [15].)

Soit φ une représentation de la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ dans un espace hilbertien H. Faisons correspondre à chaque vecteur $\xi \in H$ le sous-espace $H_\xi \subset H$ qui est l'adhérence de l'ensemble des vecteurs de la forme $\varphi(a)\xi$, $a \in \mathfrak{A}$. La restriction des opérateurs de $\varphi(\mathfrak{A})$ à H_ξ est une représentation cyclique. Notons-la φ_ξ et la mesure correspondante (sur $X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$) μ_ξ. Introduisons un ordre dans H en posant $\xi > \eta$, si $\mu_\xi \succ \mu_\eta$.

Problème 6. Si $\eta \in H\xi$, alors $\eta < \xi$.

Indication. Utiliser l'inclusion naturelle de H_η dans H_ξ.

Problème 7. Soit $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_{\xi_k}$ la décomposition de H en une somme dénombrable de sous-espaces cycliques. Démontrer que le vecteur $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \|\xi_k\|} \xi_k$ est un élément maximal de H.

Indication. Soient $\eta \in H$ et η_k la projection de η sur H_{ξ_k}. Alors $\mu_\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\eta_k}$.

Problème 8. L'ensemble des vecteurs maximaux est dense partout dans H.

Indication. Soit $\xi \in H$ un vecteur maximal. Vérifier que l'ensemble des vecteurs maximaux est dense dans H_ξ et que chaque vecteur de la forme $\xi + \eta$, où $\eta \in H_\xi^\perp$, est maximal.

Problème 9. Supposons qu'il existe une décomposition dénombrable $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_{\eta_k}$. Montrer qu'il existe alors une décomposition $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_{\xi_k}$, telle que $\xi_k > \xi_{k+1}$ quel que soit k.

Indication. Soit $\{\zeta_i\}$ une suite où chacun des vecteurs η_i se rencontre un nombre infini de fois. Définissons ξ_k par récurrence, de sorte à remplir les conditions suivantes:

1) ξ_{k+1} est un vecteur maximal dans $\left(\bigoplus_{i=1}^{k} H_{\xi_k}\right)^\perp$,

2) $\rho\left(\zeta_{k+1}, \bigoplus_{i=1}^{k+1} H_{\xi_i}\right) \leqslant \frac{1}{k+1}$.

La première partie du théorème 1 se déduit de la solution du problème 9. La deuxième partie se déduit du fait suivant.

P r o b l è m e 10. Chaque opérateur de $L^2(X, \mu)$ dans $L^2(X, \nu)$, permutable à la multiplication par les fonctions continues, est un opérateur de multiplication par une certaine fonction mesurable α, qui satisfait à la condition $|\alpha|^2\nu \prec \mu$.

En particulier, si les mesures μ et ν sont disjointes, cet opérateur est alors nul.

I n d i c a t i o n. Voir le raisonnement qui précède le problème 2.

Une autre méthode de démonstration de l'unicité consiste à définir une mesure de base μ et une fonction de multiplicité n (ou une famille décroissante de mesures μ_i) en termes invariants. Ceci est possible.

P r o b l è m e 11. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ une collection finie de vecteurs de l'espace H de la représentation φ et η un vecteur maximal de $\left(\bigoplus_{k=1}^{k-1} H_{\xi_k}\right)^\perp$.

Démontrer que $\mu_\eta \succ \mu_k$ et qu'il existe une famille $\xi_1, \ldots, \xi_k$ et un vecteur maximal $\eta \in \left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} H_{\xi_i}\right)^\perp$ tels que $\mu_\eta \sim \mu_k$.

I n d i c a t i o n. Utiliser la partie du théorème 1 déjà démontrée pour réduire le problème au cas $\varphi = \varphi_{\mu, n}$.

Signalons l'analogie de la caractéristique obtenue des mesures μ_k avec les caractéristiques extrémales des valeurs propres des matrices hermitiennes.

P r o b l è m e 12 (p r i n c i p e d e C o u r a n t). Soient A un opérateur hermitien dans un espace hilbertien de dimension finie H et $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors,

$$\lambda_k = \min_{\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}} \max_{\eta \in (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})^\perp} \frac{(A\eta, \eta)}{(\eta, \eta)}.$$

(Si A est un opérateur compact hermitien l'affirmation analogue s'avère vérifiée dans le cas de dimension infinie.)

Montrons comment on peut déduire du théorème 1 le théorème spectral classique.

Soient X un compact, H un espace hilbertien. Si à chaque ensemble borélien $E \subset X$ on associe un opérateur de projection $P(E)$ dans l'espace H, de sorte que

1) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ si $E_i \cap E_j = \varnothing$ pour $i \neq j$,

2) $P(\varnothing) = 0$, $P(X) = 1$,

on dit que X est muni d'une *mesure projective* P. A chaque fonction continue f sur X on peut faire correspondre l'opérateur

$$\int_X f(x)\, dP(x),$$

où l'intégrale se définit comme limite (pour la norme) des sommes intégrales riemaniennes $\sum f(x_k) P(\Delta_k)$.

Théorème 2. *Soit A un opérateur normal (en particulier hermitien ou unitaire) dans un espace hilbertien H. Il existe alors une mesure projective P unique sur le spectre de l'opérateur A, telle que*

1) *l'opérateur $P(E)$ permute à tout opérateur permutant à A et A^*,*

2) *a lieu l'égalité*

$$A = \int x \, dP(x).$$

Pour la démonstration considérons la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ engendrée par l'opérateur A. Il est évident que $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ s'identifie au spectre de A, puisque chaque caractère de l'algèbre $\mathfrak{A}$ est bien défini par sa valeur sur A. D'après le théorème 1, nous pouvons admettre que H est l'espace de l'une des représentations $\varphi_{\mu, n}$ de l'algèbre $\mathfrak{A}$. Dans ce cas, pour $P(E)$ on peut prendre l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de l'ensemble E.

4.5. Sommes continues d'espaces hilbertiens et algèbres de von Neumann. L'opérateur de somme directe d'espaces hilbertiens admet une généralisation ultérieure.

Etant donné une famille $\{H_x\}_{x \in X}$ d'espaces hilbertiens, nous supposerons l'ensemble X muni d'une certaine mesure μ. Il est naturel d'essayer de définir un nouvel espace $H = \int_X H_x d\mu(x)$ dont les éléments seraient des fonctions f sur X qui prennent au point $x \in X$ des valeurs dans H_x, et le produit scalaire serait donné par la formule

$$(f_1, f_2) = \int_X (f_1(x), f_2(x))_{H_x} \, d\mu(x). \qquad (1)$$

La difficulté consiste dans le fait que la fonction sous le signe de l'intégrale dans la formule (1) peut s'avérer non mesurable. Dans le cas où tous les espaces H_x sont séparables, on peut introduire une définition convenable des fonctions vectorielles $f(x)$ *mesurables*, pour assurer la mesurabilité des fonctions numériques $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$.

Si tous les espaces H_x coïncident par exemple avec un seul espace séparable H, on peut alors appeler mesurable toute fonction vectorielle $f(x)$, telle que pour une certaine (et donc pour toute) base $\{e_k\}$ dans H, les fonctions numériques $x \mapsto (f(x), e_k)$ sont mesurables.

Un cas plus général se présente lorsque les espaces H_x sont des sous-espaces d'un seul espace séparable H, tandis que le projecteur orthogonal P_x sur H_x est une fonction opératoire mesurable, c'est-à-

dire pour une base quelconque $\{e_k\}$ dans H les fonctions numériques $x \mapsto (P_x e_k, e_j)$ sont mesurables.

On peut enfin considérer a priori mesurables toutes les fonctions vectorielles d'une certaine famille dénombrable Γ aux propriétés suivantes:

1) les fonctions $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ sont mesurables pour $f_1, f_2 \in \Gamma$ quelconques,

2) pour presque tous les $x \in X$, les vecteurs $f(x)$, $f \in \Gamma$ engendrent H_x.

La fonction vectorielle $f(x)$ s'appelle alors mesurable, si son produit scalaire par une fonction vectorielle quelconque de Γ est mesurable.

Quoique cette dernière méthode semble plus générale, elle est essentiellement équivalente à la méthode précédente (et même à un cas particulier, où H_x est le sous-espace minimal enveloppant les premiers $n(x)$ vecteurs de base dans H; $n(x)$ étant une fonction mesurable sur X admettant les valeurs $1, 2, \ldots, \infty$).

Lorsqu'on a déjà choisi une notion convenable de fonction vectorielle mesurable, on appelle *somme continue* $H = \int_X H_x \, d\mu(x)$ l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions vectorielles mesurables f dont la norme a un carré sommable.

L'opérateur A sur l'espace $H = \int_X H_x \, d\mu(x)$ s'appelle *décomposable*, s'il existe une famille $\{A(x)\}$ d'opérateurs dans les espaces H_x, telle que

$$(Af)(x) = A(x) f(x) \text{ presque partout sur } X. \tag{2}$$

L'ensemble des opérateurs $\{A(x)\}$ s'appelle mesurable si, pour une fonction vectorielle $f(x)$ mesurable quelconque, la fonction vectorielle $x \mapsto A(x) f(x)$ est mesurable. Si la fonction numérique $a(x) = \| A(x) \|$ appartient à $L^\infty(X, \mu)$, alors la famille $\{A(x)\}$ détermine par la formule (2) un opérateur décomposable A avec la norme $\| A \|_H = \| a \|_{L^\infty(X, \mu)}$.

Un cas particulier d'opérateurs décomposables est celui des *opérateurs diagonaux*, pour lesquels tous les $A(x)$ sont des scalaires: $A(x) = a(x) \cdot 1$.

Il est évident que les opérateurs décomposables forment une sous-algèbre $\mathscr{R}$ dans $\mathfrak{B}(H)$, tandis que les opérateurs diagonaux forment une sous-algèbre commutative $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{R}$.

Si X est un compact et μ est une mesure régulière sur X, nous noterons alors $\mathscr{D}_0$ la sous-algèbre de $\mathscr{D}$ composée d'opérateurs *diagonaux continus* (pour lesquels $a(x)$ est une fonction continue). Nous supposerons que supp $\mu = X$.

Soient H un espace hilbertien séparable quelconque, $\mathcal{R}$ une sous-algèbre dans $\mathfrak{B}(H)$, $\mathcal{D}$ une sous-algèbre commutative de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{D}_0$ une sous-algèbre de $\mathcal{D}$.

Théorème 1. *Les sous-algèbres $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_0$ peuvent jouer le rôle de sous-algèbres décomposables, diagonales et diagonales continues pour une certaine réalisation de H en forme de somme continue d'espaces hilbertiens, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1) *$\mathcal{R}$ est fermée dans la topologie forte* (*ou*, ce qui revient au même, *dans la topologie faible*) *opératoire*;

2) *$\mathcal{D}$ coïncide avec le centre de $\mathcal{R}$*;

3) *$\mathcal{D}_0$ est fermée pour la norme et dense dans $\mathcal{D}$ par rapport à la topologie forte* (*ou*, ce qui revient au même, *faible*).

Pour la démonstration, il est commode de se servir de la notion d'algèbre de von Neumann.

L'algèbre symétrique $\mathfrak{A}$ d'opérateurs dans un espace hilbertien H s'appelle *algèbre de von Neumann* si une des conditions équivalentes ci-dessous est satisfaite.

1) $\mathfrak{A}$ contient l'unité et est faiblement fermée,

2) $\mathfrak{A}$ contient l'unité et est fortement fermée,

3) $\mathfrak{A}$ coïncide avec son bicommutant.

Rappelons que l'on appelle *commutant* d'une algèbre $\mathfrak{A}$ l'ensemble $\mathfrak{A}^!$ de tous les opérateurs permutables aux opérateurs de $\mathfrak{A}$ et *bicommutant* c'est le commutant du commutant [1]). Il est évident que la condition 3) implique 1) et la condition 1) implique 2). Montrons que 2) implique 3).

Il suffit de vérifier que si $\mathfrak{A}$ contient l'unité, alors $\mathfrak{A}^{!!} = (\mathfrak{A}^!)^!$ coïncide avec l'adhérence forte de $\mathfrak{A}$. Soient $A \in \mathfrak{A}^{!!}$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ une famille finie quelconque de vecteurs de H. Il nous faut vérifier que, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un opérateur $A_0 \in \mathfrak{A}$ tel que $\| A_0\xi_i - A\xi_i \| < \varepsilon$ pour $i = 1, \ldots, n$. Considérons d'abord le cas $n = 1$.

Soit E le sous-espace fermé de H engendré par les vecteurs de la forme $A_0\xi$, $A_0 \in \mathfrak{A}$. L'opérateur P de projection orthogonale sur E se trouve dans $\mathfrak{A}^!$ (parce que E est invariant par rapport à $\mathfrak{A}$). Par conséquent, P permute à l'opérateur $A \in \mathfrak{A}^{!!}$. Nous avons donc $A\xi = AP_\xi = PA_\xi \in E$, ce qu'il fallait démontrer. Le cas général se réduit au cas considéré de la manière suivante. Considérons l'algèbre $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \otimes 1_{\mathbf{C}^n}$ dans $\widetilde{H} = H \otimes \mathbf{C}^n = H \oplus \ldots \oplus H$ (n termes).

Problème 1. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre symétrique d'opérateurs dans l'espace hilbertien H_1. Soit H_2 un autre espace hilbertien quelconque; alors

---

[1]) Pour éviter toute confusion avec l'espace topologique adjoint de $\mathfrak{A}$, nous avons choisi le symbole $\mathfrak{A}^!$ au lieu de la notation usuelle $\mathfrak{A}'$ du commutant de l'algèbre $\mathfrak{A}'$.

pour les algèbres d'opérateurs dans le produit tensoriel hilbertien $H_1 \otimes H_2$ nous avons les relations suivantes

$$(\mathfrak{A} \otimes 1_{H_1})^! \supset \mathfrak{A}^! \otimes \mathfrak{B}(H_2), \quad (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}(H_2))^! = \mathfrak{A}^! \otimes 1_{H_2}.$$

Indication. Utiliser l'écriture du produit tensoriel d'opérateurs en forme de matrice (voir 3.4).

Ainsi, dans notre cas $(\widetilde{\mathfrak{A}})^{!!} = \mathfrak{A}^{!!} \otimes 1_{\mathbf{C}^n}$. En appliquant au vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \widetilde{H}$ l'affirmation démontrée plus haut on obtient la démonstration dans le cas général.

Problème 2. Si $\mathfrak{A}$ est une algèbre de von Neumann, alors son centre $Z(\mathfrak{A})$ coïncide avec le centre $Z(\mathfrak{A}^!)$ de l'algèbre $\mathfrak{A}^!$ et avec l'intersection $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^!$.

Par conséquent, les conditions du théorème 1 peuvent être formulées comme suit:

$\mathcal{D}_0$ est une C^*-algèbre commutative d'opérateurs, et $\mathcal{R} = \mathcal{D}_0^!$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0^{!!}$.

Démontrons la nécessité de ces conditions. Il est évident que $\mathcal{D}_0$ est fermée pour la norme, puisque la norme d'un opérateur de multiplication par une fonction $a(x)$ continue dans $L^2(X, \mu)$ est égale au maximum de la valeur absolue de a sur $\operatorname{supp} \mu = X$.

Soit $A \in \mathcal{D}_0^!$. Démontrons que A est un opérateur décomposable. Puisque A est permutable à la multiplication par toutes les fonctions continues, il l'est également par rapport à leurs limites faibles, et, en particulier, à la multiplication par les fonctions mesurables bornées. Soit

$$H = \int_X H_x \, d\mu(x)$$

et X_k est un sous-ensemble pour un certain $k = \dim H_x$.

L'opérateur A permute à la multiplication par les fonctions caractéristiques des ensembles X_k. Ceci permet de réduire le problème au cas où $X = X_k$.

Dans ce cas, tous les espaces H_x peuvent être identifiés avec un espace fixe L, et l'espace H avec un produit tensoriel hilbertien $L \otimes L^2(X, \mu)$. Soit $e_1, \ldots, e_k$ une base de L. Nous allons démontrer qu'il existe des fonctions mesurables $a_{ij}(x)$ telles que l'opérateur A agit suivant la formule

$$A\colon e_i \otimes f(x) \mapsto \sum_j e_j \otimes a_{ij}(x) f(x). \tag{1}$$

Définissons $a_{ij}(x)$ à partir de la relation

$$A(e_i \otimes 1) = \sum_j e_j \otimes a_{ij}(x). \tag{2}$$

(Remarquons que chaque vecteur de $L \otimes L^2(X, \mu)$ a la forme du membre droit de l'égalité (2).)

Alors, l'égalité (1) découle de (2) et du fait que A est permutable à la multiplication par $f(x)$. Par conséquent, $\mathscr{R} \supset \mathscr{D}_0^!$, et donc $\mathscr{R} = \mathscr{D}_0^!$.

Supposons maintenant que $A \in \mathscr{D}_0^{!!} = \mathscr{R}^!$. Puisque $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}_0^!$, nous avons $\mathscr{D}_0^{!!} \subset \mathscr{D}_0^! = \mathscr{R}$. Donc A est décomposable et, par conséquent, est engendré par une famille de fonctions $\{a_{ij}(x)\}$. L'opérateur $A \subset \mathscr{R}^!$ doit permuter aux opérateurs décomposables B_{kl}, engendrés par la famille

$$b_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = k,\ j = l. \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On obtient donc que $a_{ij}(x) = 0$ presque partout pour $i \neq j$ et que $a_{ii}(x) = a_{jj}(x)$ presque partout pour i et j quelconques. Mais cela veut dire que A est un opérateur diagonal, c'est-à-dire que $\mathscr{D}_0^{!!} = \mathscr{D}$.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, il suffit d'appliquer à l'algèbre $\mathscr{D}_0$ le théorème 1 de 4.4 et de remarquer que l'espace des représentations $\varphi_{\mu, n}$ est une somme continue $\int_X H_x \, d\mu(x)$, où $X = \mathfrak{M}(\mathscr{D}_0)$ et $\dim H_x = n(x)$.

Le théorème est démontré.

L'algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$ s'appelle *algèbre de type* I, si elle est isomorphe (comme C^*-algèbre) à l'algèbre de tous les opérateurs décomposables en une certaine somme continue d'espaces hilbertiens $\int_H H_x d\mu(x)$. Cette algèbre est désignée par $\int_X \mathfrak{B}(H_x)\, d\mu(x)$ et appelée *produit continu des algèbres* $\mathfrak{B}(H_x)$.

L'algèbre $\mathfrak{A}$ de type I s'appelle *homogène de degré n* si $\dim H_x \equiv n$. Autrement dit, une algèbre uniforme de type I et de degré n est isomorphe à l'algèbre de toutes les fonctions mesurables essentiellement bornées sur un certain espace X à mesure μ qui admettent dans l'algèbre $\mathfrak{B}(H)$ les valeurs de tous les opérateurs bornés dans un espace hilbertien H de dimension n.

Problème 3. Si X se compose d'un ensemble fini ou dénombrable de points de mesure positive, alors l'algèbre $\mathfrak{A} = \int_X \mathfrak{B}(H_x)\, d\mu(x)$ est isomorphe au produit (dans la catégorie des C^*-algèbres) de la famille d'algèbres $\mathfrak{B}(H_x)$, $x \in V$.

Indication. Notons p_x l'application qui fait correspondre à chaque fonction opératoire sa valeur au point $x \in X$. Montrer que la collection $\{p_x\}$ est une famille de projections canoniques de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{B}(H_x)$.

Problème 4. Montrer que chaque algèbre de type I est isomorphe à un produit d'algèbres homogènes.

I n d i c a t i o n. Soit $X = \bigcup_k X_k$ la décomposition de X en ensembles de valeurs constantes des fonctions $n(x) = \dim H_x$. Démontrer que $\mathfrak{A}$ est un produit d'algèbres $\mathfrak{A}_k = \int_{X_k} \mathfrak{B}(H_x)\, d\mu(x)$.

Dans ce qui va suivre, il nous faudra connaître la classification des algèbres de type I à un isomorphisme spatial près (voir 4.4).

Soient $\{H_x\}$ et $\{L_x\}$ deux familles d'espaces hilbertiens séparables sur l'espace X à mesure μ. Dans l'espace $V = \int_X H_x \otimes L_x d\mu(x)$ considérons l'algèbre de tous les opérateurs décomposables de la forme $A = \{A_x \otimes 1\}$, $A_x \in \mathfrak{B}(H_x)$. Désignons cette algèbre par $\int_X \mathfrak{B}(H_x) \otimes 1\, d\mu(x)$. Il est clair qu'elle est isomorphe à un produit continu $\int_X \mathfrak{B}(H_x)\, d\mu(x)$.

T h é o r è m e 2. *Chaque algèbre de von Neumann* $\mathfrak{A}$ *isomorphe* (*comme* C^*-*algèbre*) *à un produit continu* $\int \mathfrak{B}(H_x)\, d\mu(x)$, *est spatialement isomorphe à l'algèbre* $\int_X \mathfrak{B}(H_x) \otimes 1 d\mu(x)$ *dans l'espace* $\int_X H_x \otimes L_x d\mu(x)$.

D é m o n s t r a t i o n. Notons avant tout qu'il suffit de considérer le cas d'une algèbre homogène de degré n. En effet, soient $\mathfrak{A} = \prod_k \mathfrak{A}_k$ la décomposition de $\mathfrak{A}$ en un produit de composantes homogènes et E_k un élément de $\mathfrak{A}$ défini par les conditions

$$p_j(E_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Alors $\{E_k\}$ est la famille des idempotants orthogonaux (cf. avec 8.3) qui engendre la décomposition de V en une somme hilbertienne de sous-espaces $V_k = E_k V$, de sorte que la restriction de $\mathfrak{A}$ à V_k soit isomorphe à $\mathfrak{A}_k$.

Ainsi, nous pouvons admettre que $\mathfrak{A}$ est homogène de degré n et isomorphe à l'algèbre des fonctions opératoires sur X à valeurs dans $\mathfrak{L}(H)$, $\dim H = n$.

En appliquant le théorème 1 à la sous-algèbre $C(X) \subset \mathfrak{A}$ (qui joue le rôle de $\mathscr{Z}_0$), on peut considérer que l'espace V, où agit $\mathfrak{A}$, est de la forme $V = \int_X V_x d\nu(x)$.

Problème 5. Démontrer que la mesure μ est équivalente à la mesure μ qui figure dans la condition du théorème 2.

Indication. Les algèbres $L^\infty(X, \mu)$ et $L^\infty(X, \nu)$ sont toutes deux isomorphes à $D_0^{!!}$.

Dans ce qui va suivre, nous supposons $\nu = \mu$. Choisissons une base $\{\xi_i\}$ dans H et notons E_{ik} l'élément de $\mathfrak{A}$ qui correspond à la fonction constante sur X, dont la valeur est l'opérateur e_{ik} transformant ξ_i en ξ_k et annulant les autres vecteurs de la base.

Des relations

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}, \quad \sum_i E_{ii} = 1$$

il découle que, pour presque tous les $x \in X$, il existe une décomposition $V_x = \bigoplus_k V_x^k$ telle que les opérateurs $(E_{ii})_x$ sont des projecteurs sur les sous-espaces V_x^i, et $(E_{jk})_x$ engendre un isomorphisme de V_x^k sur V_j^x. Soit L_x un espace hilbertien isomorphe à chacun des espaces V_x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors V_x s'identifie avec $H_x \otimes L_x$ et l'opérateur $(E_{ik})_x$ avec l'opérateur $e_{ik} \otimes 1$.

Le théorème se déduit maintenant sans difficulté.

Problème 6. Démontrer que

$$\left(\int_X \mathfrak{B}(H_x) \otimes 1 \, d\mu(x)\right)^! = \int_X 1 \otimes \mathfrak{B}(L_x) \, d\mu(x).$$

Corollaire. *Si $\mathfrak{A}$ est une algèbre de type* I, *alors $\mathfrak{A}^!$ l'est aussi.*

Une algèbre de von Neumann s'appelle algèbre *facteur*, si son centre est composé d'opérateurs scalaires. Les résultats précédents peuvent être reformulés de la manière suivante. Chaque algèbre facteur de type I est isomorphe (comme C^*-algèbre) à l'algèbre $\mathfrak{B}(H)$ de tous les opérateurs bornés dans un certain espace hilbertien H et spatialement isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{B}(H) \otimes 1$ dans un certain espace de type $H \otimes L$; chaque algèbre de von Neumann de type I est spatialement isomorphe à un produit continu de facteurs de type I.

Pour des renseignements plus poussés sur la théorie des algèbres de von Neumann voir les livres [15] et [44].

§ 5. ANALYSE SUR LES VARIÉTÉS

5.1. Variétés. On appelle variétés les ensembles qui ressemblent localement aux espaces euclidiens. Cette propriété des variétés permet d'y introduire des systèmes de cordonnées locales et d'utiliser l'appareil de l'analyse mathématique. La définition exacte d'une variété est la suivante.

Un espace topologique M s'appelle *variété*, si, pour chaque point $x \in M$, il existe un voisinage U homéomorphe à un sous-ensemble

ouvert de $\mathbf{R}^n$. Le nombre n s'appelle *dimension* de la variété M au point x.

Le fait que cette définition est correcte découle du théorème de topologie bien connu:

Un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ *ne peut être homéomorphe à un ouvert de* $\mathbf{R}^m$ *pour* $n \neq m$.

Problème 1. Démontrer que chaque variété connexe possède en chaque point la même dimension.

On appelle *système de coordonnées local*, ou plus brièvement, *carte*, sur une variété M tout ouvert $U \subset M$ muni d'un homéomorphisme α de cet ensemble sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Les coordonnées du point $\alpha(x) \in \mathbf{R}^n$ s'appellent *coordonnées locales* du point $x \in U$.

Un ensemble de cartes qui recouvre toute la variété M s'appelle *atlas*.

Exemple 1. La longitude et la latitude géographiques sur la surface de la sphère. Ici M est une sphère unité dans $\mathbf{R}^3$, définie par l'égalité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, U est le domaine obtenu en éliminant de la sphère le méridien $y = 0$, $x \leqslant 0$. L'homéomorphisme α envoie le point $(x, y, z) \in M$ dans $(\varphi, \psi) \in \mathbf{R}^2$ par les formules

$$x = \cos\varphi\cos\psi, \qquad y = \sin\varphi\cos\psi, \qquad z = \sin\psi,$$

de sorte que le domaine U soit envoyé dans un rectangle ouvert

$$|\varphi| < \pi, \ |\psi| < \pi/2 \text{ de } \mathbf{R}^2.$$

Exemple 2. Projection stéréographique de la sphère sur le plan. Ici U s'obtient en éliminant de M le point $(0, 0, 1)$. L'homéomorphisme α envoie chaque point $(x, y, z) \in M$ dans un point $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ suivant les formules

$$u = \frac{2x}{1-z}, \qquad v = \frac{2y}{1-z}.$$

Exemple 3. Considérons pour M la surface du cube dans $\mathbf{R}^3$ défini par les inégalités $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$. Définissons sur M un atlas de huit cartes, en prenant pour U_i l'étoile du i-ième sommet, c'est-à-dire la réunion de ce sommet, des trois arêtes ouvertes qui en sortent et des trois faces ouvertes qui ont ces arêtes pour côtés. Pour l'homéomorphisme α_i prenons la projection de U_i sur le plan perpendiculaire à la diagonale principale qui passe par le i-ième sommet. Il est évident que $\alpha_i(U_i)$ sera l'intérieur d'un hexagone régulier dans $\mathbf{R}^2$.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons que toutes les variétés considérées sont des espaces de Hausdorf et possèdent une base dénombrable d'ensembles ouverts.

Comme exemple de variété non séparée, considérons l'espace obtenu en collant deux exemplaires de la ligne droite numérique le long d'une demi-droite ouverte. Cet exemple peut être généralisé en prenant quelques variétés « usuelles » de même dimension et en les collant le long de quelques ouverts.

Comme exemple de variété sans base dénombrable, citons la *droite* dite d'*Alexandrov*. Soit T l'ensemble de tous les transfinis dénombrables (c'est-à-dire des classes d'équivalence des ensembles totalement ordonnés dénombrables). Dans le produit $T \times [0, 1) = A$, on peut définir un ordre lexicographique: $(t_1, x_1) < (t_2, x_2)$ si $t_1 < t_2$, ou $t_1 = t_2$ et $x_1 < x_2$. La base de la topologie de A forme les intervalles

$$I(b, c) = \{a \in A \; ; \; b < a < c\} \text{ et } I(b) = \{a \in A \; ; \; a > b\}.$$

On dit que l'application φ d'un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ dans l'espace $\mathbf{R}^m$ appartient à la *classe* C^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega$, si les coordonnées du point $\varphi(x)$, considérées comme fonctions du point x, possèdent k dérivées continues (sont, respectivement, continues pour $k = 0$, infiniment différentiables pour $k = \infty$ et analytiques pour $k = \omega$).

Soient (U, α) et (V, β) deux cartes de la variété M. Nous dirons que ces cartes sont *k-différentiablement liées*, si les applications $\alpha \circ \beta^{-1}$ et $\beta \circ \alpha^{-1}$ appartiennent à la classe C^k.

Nous supposerons que les conditions de la définition sont satisfaites lorsque $U \cap V = \varnothing$, c'est-à-dire deux cartes disjointes sont k-différentiablement liées pour k quelconque.

La variété M s'appelle *variété différentiable de classe* C^k, si elle possède un atlas A, dont toutes les cartes sont k-différentiablement liées. On appelle *carte admissible* sur M toute carte k-différentiablement liée à toutes les cartes de A.

Problème 2. Démontrer que deux cartes quelconques sur la sphère dans les exemples 1 et 2 sont ω-différentiablement liées entre elles.

Problème 3. Démontrer que les cartes U_1 et U_j sur la surface du cube dans l'exemple 3 sont k-différentiablement liées entre elles, où

$$k = \begin{cases} = 0 \text{ si les } i\text{-ième et } j\text{-ième sommets sont les extrémités d'une} \\ \qquad \text{diagonale d'une face,} \\ = \omega \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Si M et N sont des variétés de la classe C^k, alors on peut considérer les applications l-différentiables de M dans N pour $l \leqslant k$. A savoir, nous noterons $C^l(M, N)$ l'ensemble de toutes les applications $\varphi: M \to N$ telles que, pour des cartes admissibles quelconques (U, α) sur M et (V, β) sur N, l'application $\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ appartient à la classe C.

En particulier, $C^l(M, \mathbf{R})$ ou simplement $C^l(M)$ est l'ensemble de toutes les fonctions réelles l-différentiables sur M; $C^l(\mathbf{R}, M)$ est l'ensemble des courbes l-différentiables sur M.

Une bijection $\varphi: M \to N$ s'appelle *difféomorphisme*, si φ et φ^{-1} sont des applications différentiables. On dit alors que M et N sont difféomorphes.

Il est connu que toute variété de dimension inférieure à 7 admet une seule structure de variété différentiable. (Nous rappelons que toutes les variétés considérées sont à base dénombrable. On sait que sur la droite d'Alexandrov la C^ω-structure n'est pas unique.) La sphère S^7 de dimension 7 possède plusieurs structures différentiables et, parmi les variétés de dimensions 8, il y a celles qui n'admettent aucune structure différentiable.

Citons quelques exemples de variétés différentiables. On démontre facilement que les espaces numériques $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$, la sphère $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ (donnée par l'equation $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$), le tore $\mathbf{T}^n \subset \mathbf{C}^n$ (donné par les équations $|z_i| = 1$, $i = 1, \ldots, n$) sont tous des C^ω-variétés. Si M et N sont des variétés différentiables, leur produit $M \times N$ l'est aussi, si pour atlas de $M \times N$ on prend l'ensemble de toutes les cartes de la forme $(U \times V, \alpha \times \beta)$, où (U, α) et (V, β) sont des cartes admissibles de M et de N. La variété $M \times N$ est le produit de M et N dans la catégorie des variétés différentiables (les morphismes étant des applications différentiables).

Exemple 4. L'espace réel projectif $\mathbf{RP}^n$ est l'ensemble de toutes les droites passant par l'origine des coordonnées dans $\mathbf{R}^{n+1}$. La base d'ouverts dans $\mathbf{RP}^n$ est formée par les ensembles de droites, qui possèdent une intersection non vide avec un certain ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$. Montrons qu'on peut munir $\mathbf{RP}^n$ d'une structure de C^ω-variété. Une droite de $\mathbf{RP}^n$ se définit par un vecteur-directeur $(a_1, \ldots, \ldots, a_{n+1})$, où les nombres a_i ne sont pas tous nuls et sont définis à un facteur numérique commun près. Désignons par U_i l'ensemble de toutes les droites pour lesquelles $a_i \neq 0$ et définissons le homéomorphisme $\alpha_i : U_i \to \mathbf{R}^n$, envoyant la droite à vecteur-directeur $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ dans le point

$$\left(\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_i}\right) \in \mathbf{R}^n.$$

Problème 4. Vérifier que la famille $\{(U_i, \alpha_i)\}$ est un atlas de cartes sur $\mathbf{RP}^n$ liées ω-différentiablement.

Voici encore un exemple de caractère plus général.

Exemple 5. Soit $\mathbf{G}^{\mathbf{R}}_{n,k}$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k dans un espace réel de dimension n. Un élément de $\mathbf{G}^{\mathbf{R}}_{n,k}$ est engendré par un système de k vecteurs linéairement indépendants

$$\xi_i = (\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n), \qquad i = 1, 2, \ldots k,$$

c'est-à-dire se détermine par la matrice $\Xi = \| \xi_i^j \|$ d'ordre $k \times n$ et de rang k. Il est évident que les matrices Ξ et Ξ' définissent un même élément de $\mathbf{G}^{\mathbf{R}}_{n,k}$, si $\Xi' = C\Xi$, où C est une matrice non dégénérée d'ordre $k \times k$.

Soit $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Notons U_j le sous-ensemble de $\mathbf{G}^{\mathbf{R}}_{n,k}$, dont les éléments se déterminent par les matrices Ξ pour lesquelles $\det \| \xi^m_j \|_{j \in J} \neq 0$. Remplaçant Ξ par $\Xi' = C\Xi$, nous obtiendrons les égalités

$$\tilde{\xi}^m_{j_r} = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \neq r, \\ 1 \text{ pour } m = r. \end{cases}$$

Les autres éléments $\tilde{\xi}^i_j$, $j \in J$ de la matrice définissent une application de U_J dans $\mathbf{R}^{k(n-k)}$, que nous noterons α_J.

P r o b l è m e 5. Démontrer que la famille $\{(U_J, \alpha_J)\}$ est un atlas de cartes de $\mathbf{G}^{\mathbf{R}}_{n,k}$ ω-différentiablement liées.

P r o b l è m e 6. Démontrer que $\mathbf{G}^{\mathbf{R}}_{n,k}$ et $\mathbf{G}^{\mathbf{R}}_{n,n-k}$ sont difféomorphes.

Les variétés $\mathbf{G}^{\mathbf{R}}_{n,k}$ s'appellent *variétés grassmaniennes réelles*. On peut définir de la même manière des *variétés grassmaniennes complexes* $\mathbf{G}^{\mathbf{C}}_{n,k}$.

Une classe importante de variétés s'obtient de la façon suivante. Soit $f_1, \ldots, f_m$ une famille de fonctions k-différentiables, définies dans un domaine $U \subset \mathbf{R}^n$. Notons M l'ensemble de toutes les solutions du système

$$f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0.$$

Par la suite nous aurons besoin du fait suivant de l'analyse découlant du théorème des fonctions implicites.

T h é o r è m e 1. *Supposons que dans le voisinage de l'ensemble M le rang de la matrice $F(x) = \| df_i(x)/dx_j \|$ soit une constante r. Alors, l'ensemble M admet une seule structure de variété k-différentiable de dimension $n - r$ telle que:*

1) *les restrictions sur M des fonctions de $C^k(U)$ appartiennent à $C^k(M)$;*

2) *pour carte admissible dans le voisinage du point $x \in M$ on peut prendre la projection de ce voisinage sur un plan de dimension $(n - r)$ quelconque, transversal aux vecteurs-lignes de la matrice $F(x)$ (c'est-à-dire sur un plan ne contenant aucune combinaison linéaire non nulle de lignes de $F(x)$).*

E x e m p l e 6. Soit $\mathrm{Mat}_n(K)$ l'ensemble de toutes les matrices d'ordre n à éléments de K. Dans les exemples concrets qui vont suivre, K est soit le corps $\mathbf{R}$ des réels, soit le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, soit le corps $\mathbf{H}$ des quaternions. Si $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, alors A' est la matrice transposée aux éléments $a'_{ij} = a_{ji}$. A^* est la matrice conjuguée aux éléments $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (le petit trait indique la conjugaison complexe ou quaternionienne).

Nous noterons $GL(n, k)$ le sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Mat}_n(K)$ défini par la condition $\det A \neq 0$ [1].

Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Considérons dans $GL(n, k)$ les sous-ensembles définis par les équations:

$$X^{-1}AX = A, \tag{1}$$

$$X'AX = A, \tag{2}$$

$$X^*AX = A. \tag{3}$$

Chacune de ces équations matricielles est équivalente à un système de n^2 équations usuelles à n^2 inconnues qui sont les éléments x_{ij} de la matrice X.

Problème 7. Démontrer que les applications ci-dessous de $GL(n, k)$ dans $\mathrm{Mat}_n K$ ont un rang fixe

$$X \mapsto X^{-1}AX - A,$$

$$X \mapsto X'AX - A,$$

$$X \mapsto X^*AX - A.$$

Indication. Démontrer que si $C \in GL(n, k)$, alors les applications $X \mapsto CX$ et $X \mapsto XC$ sont des difféomorphismes de $\mathrm{Mat}_n(K)$. Utiliser ensuite le fait que le rang d'une application ne change pas par sa composition avec un difféomorphisme.

Du problème 7 et du théorème 1 il s'ensuit que les sous-ensembles donnés par les équations (1), (2), (3) sont des variétés différentiables. Notons quelques cas particuliers de cette construction.

Soit 1_n une matrice unité d'ordre n.

L'équation (2) définit pour $A = 1_n$ l'ensemble $O(n, k)$ des matrices *orthogonales* ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). L'équation (3) définit pour $A = 1_n$, $K = \mathbf{C}$ l'ensemble $U(n)$ des matrices *unitaires*. Si A est une matrice antisymétrique d'ordre $2n$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$, alors l'équation (2) définit l'ensemble $Sp(2n, K)$ des matrices *simplectiques* ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

Problème 8. Démontrer que si $K = \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1_n & 1_n \\ -1_n & 1_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbf{R})$, alors l'équation (2) définit l'ensemble $O(2n, \mathbf{R}) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$, homéomorphe à $U(n)$.

Indication. Considérer l'application de $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{Mat}_{2n}(\mathbf{R})$ donnée par la formule

$$X + iY \mapsto \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}).$$

Si $A = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$, l'équation (2) définit pour $K = \mathbf{R}$ l'ensemble $O(p, q)$ des matrices *pseudo-orthogonales* de type (p, q). Pour la

[1]) Pour déterminer $\det A$ dans le ca s $K = \mathbf{H}$ on peut servir des inclusions de $\mathbf{H}$ dans $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})$ ou dans $\mathrm{Mat}_4(\mathbf{R})$ (voir 3.2).

même matrice A l'équation (3) définit, si $K = \mathbf{C}$, l'ensemble $U(p, q)$ des matrices *pseudo-unitaires* de type (p, q), et, si $K = \mathbf{H}$, l'ensemble $Sp(p, q)$ des matrices *pseudo-simplectiques* de type (p, q).

Disons que deux cartes (U, α) et (V, β) de la variété M *sont liées positivement*, si l'application $\alpha\beta^{-1}$ possède un jacobien positif dans tout le domaine de définition. Un atlas s'appelle *positif* s'il est composé de cartes positivement liées. Deux atlas positifs sont *équivalents* si leur réunion est un atlas positif.

Problème 9. Démontrer que pour toute variété connexe M, le nombre de classes d'équivalence d'atlas positifs soit nul, soit égal à 2.

Dans le premier cas, la variété M s'appelle *non orientable*, dans le second *orientable*, et le choix de l'une de ses deux classes d'atlas positifs s'appelle *orientation* de M.

Problème 10. Pour quels n et k la variété $G^{\mathbf{R}}_{n,k}$ est-elle orientable?
Réponse. Pour les n impairs (si $0 < k < n$).

On peut se donner une structure de variété différentiable de dimension k sur un espace topologique M d'une autre manière: en associant à chaque sous-ensemble ouvert $U \subset X$ l'anneau C^kU des fonctions k-différentiables sur U. Il est évident que l'application $U \mapsto C^k(U)$ définit un foncteur contravariant de la catégorie des ensembles ouverts (les morphismes sont les inclusions) dans la catégorie des anneaux. Ces foncteurs s'appellent *préfaisceaux* (plus exactement, *préfaisceaux d'anneaux*; on définit d'une manière analogue les *préfaisceaux de groupes*, *d'algèbres*, *d'ensembles*, etc.).

Un préfaisceau F s'appelle *faisceau*, si pour tout ouvert $U \subset X$ et pour son recouvrement quelconque par sous-ensembles ouverts U_α, $\alpha \in A$ on a la suite exacte:

$$0 \to F(U) \xrightarrow{i} \prod_{\alpha \in A} F(U)_\alpha \xrightarrow{j} \prod_{\alpha, \beta \in A} F(U_\alpha \cap U_\beta), \tag{4}$$

où le morphisme i correspond aux inclusions de U_α dans U et le morphisme j est la différence des morphismes qui correspondent aux inclusions de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans U_α et dans U_β.

L'exemple du préfaisceau $U \mapsto C^k(U)$ (qui est un faisceau) permet de se convaincre intuitivement de l'exactitude de cette suite. A savoir, l'exactitude au premier membre veut dire que chaque fonction différentiable sur U est entièrement définie par ses restrictions à U_α, $\alpha \in A$; l'exactitude au deuxième membre signifie que si chaque U_α est muni d'une fonction différentiable f_α, telle que, sur l'intersection $U_\alpha \cap U_\beta$, les fonctions f_α et f_β coïncident, alors toutes les f_α s'obtiennent par restriction d'une seule fonction différentiable f sur U.

L'espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ s'appelle *espace annelé*, et le faisceau $\mathcal{O}$ s'appelle alors *faisceau structural.*

La définition d'une variété différentiable peut maintenant être formulée de la manière suivante.

Une variété de classe C^n est un espace annelé $(X, \mathcal{O})$ localement isomorphe à une boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ munie d'un faisceau de fonctions k-différentiables.

Si, dans cette définition, on remplace $\mathbf{R}^n$ par $\mathbf{C}^n$, et le faisceau des fonctions k-différentiables par un faisceau de fonctions holomorphes (c'est-à-dire complexes analytiques), nous obtenons la définition d'une *variété complexe.*

Notons que la construction générale des espaces annelés permet de définir également la notion classique de *variété algébrique* sur un corps K (le modèle local est un sous-ensemble de K^n, défini par un système d'équations algébriques, muni d'un faisceau de fonctions rationnelles partout et défini de la topologie de Zariski), ou bien son analogue moderne — la notion de schéma sur un corps K (le modèle local est l'ensemble des idéaux simples d'une certaine K-algèbre).

Considérons l'espace annelé $(X, \mathcal{O})$, localement isomorphe au voisinage de zéro de l'espace $L = \mathbf{R}^k \oplus \mathbf{C}^l$, muni d'un faisceau de fonctions infiniment différentiables par rapport à leurs coordonnées réelles dans $\mathbf{R}^k$ et holomorphes par rapport aux coordonnées complexes dans $\mathbf{C}^l$.

Nous appellerons un tel espace $(X, \mathcal{O})$ variété mixte de type (k, l), s'il existe une variété Y réelle différentiable de dimension k et une application $p: X \to Y$, telles que chaque « fibre » $p^{-1}(y)$, $y \in Y$ est une variété complexe de dimension l et le faisceau structural $\mathcal{O}$ sur X se compose de fonctions différentiables, holomorphes le long de chaque fibre.

Problème 11. Démontrer que l'espace Y et la projection p se déterminent uniquement par $(X, \mathcal{O})$.

Indication. Soient $\overline{\mathcal{O}}$ le faisceau de fonctions conjuguées complexes avec les fonctions de $\mathcal{O}$, A l'algèbre $\mathcal{O}(X) \cap \overline{\mathcal{O}}(X)$. Alors $Y = \mathfrak{M}(A)$ et p est l'application naturelle de X dans Y, faisant correspondre à chaque point $x \in X$ l'idéal $p(x) \subset A$ de toutes les fonctions nulles en x.

Problème 12. Soit $(X, \mathcal{O})$ l'espace annelé quotient de $L = \mathbf{R}^k \oplus \mathbf{C}^l$ par un groupe discret Γ de translations dans L. Démontrer que $(X, \mathcal{O})$ sera une variété mixte si et seulement si la projection Γ_0 du groupe Γ sur le groupe de translations de $\mathbf{R}^k$ est discrète.

Indication. Supposons $A = \mathcal{O}(X) \cap \overline{\mathcal{O}}(X)$. Vérifier que A est isomorphe à l'algèbre des fonctions différentiables sur $\mathbf{R}^k$, invariantes relativement à Γ_0.

5.2. Champs de vecteurs. Une des notions fondamentales de la théorie des variétés différentiables est celle de vecteur tangent dont le sens intuitif est la vitesse d'un point mobile sur la variété. Une définition exacte peut être formulée comme suit. Appelons *courbe*

différentiable sur la variété M toute application différentiable de $\mathbf{R}$ dans M. Désignons par la lettre t le paramètre de $\mathbf{R}$ et par x un point quelconque de la variété. Une courbe différentiable $x(t)$ se définit dans le voisinage du point $x_0 = x(t_0)$ par une famille de $n = \dim M$ fonctions différentiables $x^i(t)$ (coordonnées locales du point $x(t)$ dans une certaine carte contenant le point x_0). Nous dirons que la courbe $x(t)$ est issue du point x_0, si $x(0) = x_0$. Nous appellerons deux courbes différentiables $x(t)$ et $y(t)$, issues du point x_0, équivalentes, si $|x^i(t) - y^i(t)| = o(t)$ pour $t \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Il est aisé de vérifier que cette définition de l'équivalence ne dépend pas du choix de la carte contenant le point x_0.

On appelle *vecteur tangent* à la variété M au point x_0 la classe d'équivalence des courbes différentiables issues du point x_0.

L'expression « X est un vecteur tangent à la courbe $x(t)$ pour $t = 0$ » ou la notation $X = x'(0)$ signifient que la courbe $x(t)$ appartient à la classe X.

Choisissons une carte (U, α) quelconque pour laquelle le point x_0 est l'origine des coordonnées et supposons, pour simplifier, que $\alpha(U) = \mathbf{R}^n$. L'ensemble des courbes différenciables sur U est un espace vectoriel par rapport à l'opération d'addition par coordonnées et de multiplication par les nombres:

$$(x + y)^i(t) = x^i(t) + y^i(t), \quad (\lambda x)^i(t) = \lambda \cdot x^i(t).$$

P r o b l è m e 1. Vérifier que ces opérations s'accordent à la relation d'équivalence dans le sens ci-dessus et définissent donc une structure d'espace vectoriel (sur $\mathbf{R}$) dans l'ensemble T_xM de tous les vecteurs tangents à la variété M au point x.

P r o b l è m e 2. Démontrer que la dimension de l'espace T_xM et celle de la variété M au point x sont identiques.

Bien que la définition des vecteurs tangents introduite plus haut s'accorde bien avec l'idée intuitive de vitesse, elle présente quand même certains inconvénients. Ainsi, par exemple, la définition de la somme de vecteurs tangents et du produit d'un vecteur par un nombre est basée sur les coordonnées locales.

Nous donnerons maintenant une autre définition, sans recourir aux coordonnées locales. Remarquons pour cela que chaque courbe différentiable $x(t)$ issue du point x_0 définit une forme continue F sur l'espace $C^\infty(M)$ par la formule

$$F(f) = \frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0}. \qquad (1)$$

P r o b l è m e 3. Démontrer que deux formes ci-dessus (1) coïncident si et seulement si les courbes correspondantes sont équivalentes.

Par conséquent, à chaque vecteur tangent X correspond la forme F généralement appelée *dérivée le long du vecteur* X.

Problème 4. Démontrer que la forme F sur $C^\infty(M)$ peut être représentée pour une certaine courbe $x(t)$ issue de x_0 par la formule (1) si et seulement si les fonctions f_1 et f_2 de $C^\infty(M)$ quelconques satisfont à l'égalité

$$F(f_1 f_2) = F(f_1) f_2(x_0) + f_1(x_0) F(f_2). \tag{2}$$

Ces résultats montrent que la définition du vecteur tangent ci-dessus équivaut à la suivante.

On appelle *vecteur tangent* à la variété M au point x_0 toute forme linéaire de $C^\infty(M)$, qui satisfait à la condition (2).

La structure d'espace vectoriel s'introduit d'une manière évidente dans l'ensemble des vecteurs tangents, dans le sens de cette définition, puisque les formes s'ajoutent et se multiplient par les scalaires très naturellement.

Pour les calculs pratiques avec les vecteurs tangents il est utile d'introduire des coordonnées dans l'espace T_xM.

Soit (U, α) une carte quelconque sur M. Pour tout point $x \in U$ on peut définir n vecteurs tangents $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$, en définissant les formes correspondantes comme les dérivées partielles par rapport aux coordonnées locales du point x.

Problème 5. Démontrer que pour chaque point $x \in U$ les vecteurs $\partial/\partial x^i$, $i = 1, \ldots, n$ forment une base dans l'espace T_xM.

Les coordonnées du vecteur $\xi \in T_xM$ dépendent donc du choix de la carte. Si U et V sont deux cartes qui recouvrent le point x, l'espace T_xM se trouve muni de deux bases $\{\partial/\partial x^i\}$, $\{\partial/\partial y^i\}$, où $\{x^i\}$, $\{y^i\}$ sont les coordonnées locales de ces cartes.

La matrice de transformation d'une base dans l'autre est de la forme $a^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$, puisque $\frac{\partial f}{\partial y^j} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$. On prend souvent cette loi de transformation pour définition du vecteur tangent.

D'après cette définition on appelle *vecteur tangent* à la variété M au point x une application qui fait correspondre à chaque carte $U \ni x$ la famille des nombres $\{\xi^i(U)\}$, telle que si $\{x^i\}$ sont les coordonnées locales de U et $\{y^i\}$ les coordonnées locales de V, alors

$$\xi^i(U) = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \xi^j(V). \tag{3}$$

Soient maintenant M et N deux variétés différentiables et $f: M \to N$ une application différentiable. L'ensemble des courbes différentiables issues du point $x \in M$ est envoyé, par l'application f, dans l'ensemble des courbes différentiables issues du point $y = f(x) \in N$. On vérifie aisément que des courbes équivalentes se transforment dans des courbes équivalentes. Nous obtenons donc une application $f_*(x): T_xM \to T_yN$.

Problème 6. Démontrer que f_* est une application linéaire et calculer sa matrice par rapport aux bases $\{\partial/\partial x^i\}$ dans T_xM et $\{\partial/\partial y^j\}$ dans T_yN.

Problème 7. Si M, N, L sont trois variétés différentiables et f: $M \to N$, $g : N \to L$ deux applications différentiables, alors

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

C'est la loi dite *de la chaîne* pour calculer les dérivées partielles d'une fonction de fonctions. En mettant chaque application sous sa forme matricielle par rapport aux bases naturelles, nous obtenons la forme usuelle de la loi de la chaîne:

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^k} = \sum_j \frac{\partial z^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k}.$$

L'application $f_*(x)$: $T_xM \to T_yN$ s'appelle *dérivée* de l'application f: $M \to N$ au point x. Considérons le cas particulier où $N = \mathbf{R}$. Vu que $\mathbf{R}$ possède une coordonnée canonique, tous les espaces $T_y\mathbf{R}$ s'identifient d'une façon naturelle à $\mathbf{R}$. Donc, l'application dérivée f_* définit une forme linéaire sur T_xM. Cette forme est désignée par df et appelée *différentielle* de la fonction f.

Si à chaque point de la variété M correspond un vecteur tangent à la variété en ce point, nous dirons que M est muni d'un *champ de vecteurs*. Dans un système de coordonnées locales un champ de vecteurs s'écrit sous la forme

$$\xi = \sum_i \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Un champ de vecteurs ξ s'appelle *différentiable*, si ses coordonnées $\xi^i(x)$ sont des fonctions différentiables. Il est évident que la définition du champ de vecteurs différentiable ne dépend pas du choix de la carte.

De même que les courbes différentiables font apparaître les vecteurs, les champs de vecteurs proviennent des applications de la variété sur elle-même. Soit $\varphi_t : M \to M$ une famille à un paramètre d'applications différentiables de la variété M. Nous supposerons que φ_t dépende différentiablement du paramètre t (c'est-à-dire que l'application $\mathbf{R} \times M \to M$, définie par la formule $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$, soit différentiable) et que pour $t = 0$ on ait l'application identique $\varphi_0(x) \equiv x$.

A chaque point $x \in M$ correspond alors une courbe différentiable $x(t) = \varphi_t(x)$ issue de ce point et, par conséquent, un vecteur tangent $x'(0)$.

Nous avons obtenu un champ de vecteurs appelé *dérivée* de la famille φ_t.

On peut alors se demander si chaque champ de vecteurs est la dérivée d'une certaine famille d'applications? La réponse est positive. Pour les variétés compactes on peut formuler une affirmation plus poussée.

T h é o r è m e 1. *Chaque champ de vecteurs différentiable* ξ *sur une variété compacte* M *est la dérivée d'un certain groupe unidimensionnel* $\{\varphi_t\}$ *de transformation de* M.

Pour la démonstration considérons l'équation différentielle sur M:

$$x'(t) = \xi(x(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

qui se met, dans un système de coordonnées locales, sous la forme d'un système

$$\frac{\partial x^i}{dt} = \xi^i(x^1, \ldots, x^n), \quad x^i(0) = x_0^i. \tag{4'}$$

Un théorème bien connu de la théorie des équations différentielles garantit l'existence et la dépendance continue par rapport aux données initiales de la solution $x(t, x_0)$ de l'équation (4) dans un certain voisinage du point quelconque $x_0 \in M$ et pour un certain intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de variation de t (ε dépend de x_0).

M étant compact, il existe donc un intervalle $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ de variation de t, où pour toute position de l'origine x_0 les solutions $x(t, x_0)$ sont définies.

P r o b l è m e 8. Démontrer que les applications $\varphi_t : x_0 \to x(t, x_0)$ satisfont à la condition

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

pour les t et s suffisamment petits.

I n d i c a t i o n. Vérifier que les courbes $x_1(t) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ et $x_2(t) = \varphi_{t+s}(x)$ satisfont à (4) pour $x_0 = \varphi_s(x)$.

Les applications φ_t pour $|t| \geqslant \varepsilon_0$ se définissent d'après la loi de multiplication du groupe. Le théorème est démontré.

Pour les variétés M non compactes, le théorème 1 est faux.

P r o b l è m e 9. Démontrer qu'au champ de vecteurs $\xi = (1 + x^2) \frac{d}{dx}$ sur la droite ne correspond aucun groupe de transformations.

I n d i c a t i o n. Montrer que pour l'application $x \mapsto y = \operatorname{arctg} x$ la droite est transformée dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et le champ ξ dans le champ $\eta = d/dy$.

Néanmoins, une proposition plus faible reste vraie.

P r o b l è m e 10. Soit ξ un champ de vecteurs sur la variété M. Démontrer qu'il existe une fonction différentiable a sur $M \times \mathbf{R}$ telle que:

1) l'équation

$$x'(t) = a(x, t)\,\xi(x), \quad x(0) = x_0 \tag{5}$$

possède une solution pour tous les $x_0 \in M$ et tous les $t \in \mathbf{R}$,

2) pour chaque point $x \in M$, il existe un $\varepsilon > 0$, tel que $a(x, t) \equiv 1$ pour $|t| < \varepsilon$.

I n d i c a t i o n. Utiliser le fait que M possède une base dénombrable et, par conséquent, est la réunion d'un ensemble dénombrable de compacts.

Il est évident que le champ ξ est la dérivée d'une famille de transformations $\varphi_t: x_0 \mapsto x(t, x_0)$, où $x(t, x_0)$ est la solution de l'équation (5).

Tout comme les vecteurs les champs de vecteurs admettent eux aussi une deuxième définition sans coordonnées locales. Il est à remarquer pour cela que chaque champ de vecteurs différentiable ξ sur M définit l'opérateur linéaire dans $C^\infty(M)$ qui fait correspondre à la fonction f et au point $x \in M$ la dérivée de f le long du vecteur $\xi(x)$. Désignons cet opérateur par la même lettre que le champ de vecteurs lui-même.

De l'égalité (2), il découle que les opérateurs correspondant à un champ de vecteurs possèdent la propriété

$$\xi(f_1 f_2) = \xi f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot \xi f_2. \tag{6}$$

Problème 11. Démontrer que chaque opérateur de $C^\infty(M)$ vérifiant (4) correspond à un champ de vecteurs différentiable.

Ainsi, nous avons obtenu une définition équivalente d'un champ de vecteurs comme opérateur de $C^\infty(M)$.

L'ensemble des champs de vecteurs admet en plus des opérations usuelles des espaces vectoriels (addition et multiplication par les nombres) une autre opération importante — la commutation.

On appelle *commutateur* de deux champs de vecteurs ξ et η le champ de vecteurs $[\xi, \eta]$ défini par la formule

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi. \tag{7}$$

Problème 12. Vérifier que l'opérateur (7) correspond effectivement à un champ de vecteurs.

Indication. Recourir aux résultats du problème 11.

Problème 13. Supposons que dans une certaine carte

$$\xi = \sum_i \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \eta = \sum_i \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Trouver l'expression du champ $[\xi, \eta]$ dans cette même carte.

Réponse. $[\xi, \eta] = \sum_i \zeta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, où

$$\zeta^i(x) = \sum_j \left(\xi^j(x) \frac{\partial \eta^i(x)}{\partial x^j} - \eta^j(x) \frac{\partial \xi^i(x)}{\partial x^j} \right).$$

La dérivée de la fonction f le long d'un champ de vecteur ξ et le commutateur des champs de vecteurs ξ et η sont des cas particuliers de l'*opérateur de Lie* L_ξ, correspondant au champ de vecteurs ξ.

Soit F un foncteur de la catégorie des variétés (les morphismes sont les homéomorphismes différentiables, que l'on appelle généralement *difféomorphismes*) dans la catégorie des espaces vectoriels topoligiques. Si ξ est un champ de vecteurs sur la variété M et $\{\varphi_t\}$ une famille de difféomorphismes de M, pour laquelle ξ est le champ dérivé, alors l'espace $F(M)$ se trouve muni d'une famille de transformations linéaires $F(\varphi_t)$. Le vecteur $f \in F(M)$ s'appelle *différentiable le long du champ* ξ, si la fonction vectorielle $t \mapsto F(\varphi_t) f$ est différentiable pour $t = 0$ et la dérivée $\frac{d}{dt}(F(\varphi_t) f)\,|_{t=0} = L_\xi f$ ne dépend pas du choix de la famille $\{\varphi_t\}$, pour laquelle ξ est le champ dérivé.

Exemple. Soit F_0 le foncteur contravariant donné par les formules: $F_0(M) = C^k(M)$, $k > 0$, $F_0(\varphi) = f \mapsto f \circ \varphi$.

Alors, $L_\xi f = \xi f$.

Problème 14. Soit F_1 un foncteur contravariant, qui fait correspondre à la variété M l'espace Vect M de tous les champs de vecteurs différentiables sur M et aux difféomorphismes φ l'application $F_1(\varphi): \eta \mapsto \varphi_*^{-1} \circ \eta \circ \varphi$ (c'est-à-dire, $[F_1(\varphi)\,\eta](x) = \varphi_*(x)^{-1}\,\eta(\varphi(x))$.

Démontrer que $L\xi\eta = [\xi, \eta]$.

Indication. Utiliser l'identité

$$F_0(\varphi)\,\eta F_0(\varphi^{-1}) = F_1(\varphi)(\eta)$$

et l'égalité suivante qu'elle entraîne

$$L_\xi(\eta f) = (L_\xi(\eta)) f + \eta(L_\xi f). \tag{8}$$

5.3. Formes différentielles. On appelle *champ de tenseurs* sur la variété M une fonction qui fait correspondre à chaque point $x \in M$ un certain tenseur sur l'espace T_xM tangent à M au point x.

Des cas particuliers de champs de tenseurs sont fournis par les fonctions (champs de tenseurs de rang 0) et les champs de vecteurs (champs de tenseurs contravariants de rang 1).

Si U est un système de coordonnées local sur M, alors on peut simultanément choisir dans tous les espaces tangents T_xM, $x \in U$ la même base $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$ et dans tous les espaces $T_x^* M$ la base duale $dx^1, \ldots, dx^n$.

La valeur du covecteur dx^i sur le vecteur $\partial/\partial x^j$ est égale au symbole de Kronecker

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \neq j, \\ 1 \text{ pour } i = j. \end{cases}$$

Chaque champ de tenseurs mixtes de rang (k, l) peut être décomposé par rapport aux champs de base

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_l}.$$

Un champ de tenseurs s'appelle *différentiable*, si les coefficients de sa décomposition par rapport aux champs de base sont des fonctions différenciables. Remarquons que cette propriété d'un champ ne dépend pas du choix du système (admissible) de coordonnées.

Les champs de tenseurs covariants antisymétriques s'appellent *formes différentielles*. Les formes différentielles ont une structure d'algèbre non commutative par rapport au produit extérieur. De plus, l'espace des formes différentielles est muni d'un opérateur dit *de différentiation extérieure*, ou *différentiel* d, qui possède les propriétés:

a) $$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2;$$

b) $$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2, \tag{1}$$

si ω_1 est une forme de degré k;

c) l'opérateur d coïncide sur les formes de degré 0 (c'est-à-dire sur les fonctions) avec la différentielle usuelle (voir 5.2);

d) $d^2 = 0$.

Les propriétés ci-dessus définissent de façon unique l'opérateur d, vu que chaque forme ω, qui s'écrit en coordonnées locales de la manière suivante

$$\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

doit vérifier les égalités

$$d\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} d\left(a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_k} da_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \text{ car } d(dx^i) = 0.$$

Problème 1. Démontrer que l'application $\omega \mapsto d\omega$, définie par la dernière égalité, ne dépend pas du choix du système de coordonnées locales et possède les propriétés (1).

Il est évident que l'opérateur d augmente de 1 le degré de la forme différentielle. Si ξ est un champ de vecteurs sur M, on peut définir l'opérateur $\iota(\xi)$, (qui diminue de 1 le degré de la forme différentielle) de la façon suivante.

Soit ω une forme de degré k, alors $\iota(\xi)\,\omega$ est une forme de degré $k-1$, qui prend sur les vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ de T_xM la valeur $k\,[\omega(x)]\,(\xi(x), \xi_1, \ldots, \xi_{k-1})$.

Problème 2. Démontrer que $\iota(\xi)$ est le seul opérateur dans l'espace des formes différentielles sur M qui possède les propriétés

a) $$\iota(\xi)(\omega_1 + \omega_2) = \iota(\xi)\,\omega_1 + \iota(\xi)\,\omega_2;$$

b) $$\iota(\xi)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \iota(\xi)\,\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k\, \omega_1 \wedge \iota(\xi)\,\omega_2, \tag{2}$$

où ω_1 est une forme de degré k;

c) si ω est une forme de degré 1, alors $\iota(\xi)\,\omega = \omega(\xi)$;
d) si ω est une forme de degré 0, alors $\iota(\xi)\,\omega = 0$.

Problème 3. Démontrer que les opérateurs $\iota(\xi)$ et d sont liés à l'opérateur de Lie L_ξ par l'identité

$$L_\xi = d \circ \iota(\xi) + \iota(\xi) \circ d. \tag{3}$$

Une propriété importante de l'opérateur d est sa permutabilité aux applications différentiables.

Problème 4. Soit f: $M \to N$ une application différentiable. Pour chaque forme différentielle ω sur N définissons la forme $f^*\omega$ sur M par l'égalité

$$[(f^*\omega)(x)](\xi_1, \ldots, \xi_k) = [\omega(f(x))](f_*(x)\,\xi_1, \ldots, f_*(x)\,\xi_k).$$

Démontrer que $d \circ f^* = f^* \circ d$.

Indication. Démontrer que f^* est permutable au produit extérieur pour recourir ensuite aux formules (1), qui permettent de réduire le problème considéré aux cas $k = 0$, ou $\omega = dx$ $k = 1$.

L'affirmation du problème 4 peut également être déduite de l'expression explicite suivante de la différentielle $d\omega$ de la forme ω de degré k:

$$(k+1)\,d\omega(\xi_0, \ldots, \xi_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \xi_i \omega(\xi_0, \ldots \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_k) +$$
$$+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_k). \tag{4}$$

$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ sont ici des champs de vecteurs différentiables quelconques et le symbole ^ signifie que l'argument correspondant est à omettre.

Démontrons l'égalité (4) par récurrence sur le degré de ω. Mettons le membre gauche sous la forme $[i(\xi_0)\,d\omega](\xi_1, \ldots, \xi_k)$ pour appliquer ensuite l'identité (3). On obtient

$$(L_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_k) - d\,[i(\xi_0\omega](\xi_1, \ldots, \xi_k). \tag{5}$$

En utilisant l'identité

$$L_{\xi_0}[\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k)] = (L_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_k) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \omega(\xi_1, \ldots, L_{\xi_0}\xi_i, \ldots, \xi_k)$$

et l'hypothèse de récurrence, il est facile de faire coïncider l'expression (5) avec le membre droit de l'égalité cherchée (4). Il ne reste qu'à vérifier la formule (4) pour $k = 0$, ce qui est trivial.

La forme ω s'appelle *fermée*, si $d\omega = 0$, et *exacte*, si $\omega = d\omega'$, pour une certaine forme ω'.

Problème 5. L'ensemble des formes fermées possède par rapport au produit extérieur une structure d'anneau ; l'ensemble des formes exactes est un idéal bilatère de cet anneau.

L'anneau quotient correspondant est noté $H^*(M, \mathbf{R})$ (ou bien $H^*(M, \mathbf{C})$, si l'on considère des formes à coefficients complexes) et appelé *anneau de cohomologie de de Rham* de la variété M. Il est naturellement gradué (par les degrés des formes):

$$H^*(M, \mathbf{R}) = \sum_{k=0}^{\dim M} H^k(M, \mathbf{R}).$$

Théorème de de Rham. *Les groupes $H^k(M, K)$, $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$, coïncident avec les groupes de cohomologie de la variété M à coefficients dans K* (voir **1**.3).

Le rôle fondamental des formes différentielles en analyse s'explique par le fait qu'elles apparaissent naturellement quand on généralise l'opération d'intégration aux variétés. En effet, soient ω une forme différentielle de degré k sur M, et N une certaine sous-variété de M de dimension k. Supposons qu'il existe une application différenciable φ d'un domaine $D \subset \mathbf{R}^k$ dans la variété M, telle que $\varphi(D) = N$. La forme $\varphi^*(\omega)$ peut s'écrire $a(x^1, \ldots, x^k)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. La formule classique de changement de variables montre que la valeur

$$I = \int \ldots \int_D a(x^1, \ldots, x^k)\, dx^1 \ldots dx^k$$

est définie (au signe près) par la variété N et la forme ω (c'est-à-dire ne dépend pas du choix de l'application paramétrisante φ).

Pour définir également le signe de I de façon unique, il faut fixer une orientation de N (voir **5**.1).

La valeur I s'appelle *intégrale de la forme* ω *sur la variété orientée* N, on la désigne par $\int_N \omega$.

Dans le cas général, lorsque N ne peut être recouverte par une seule carte, on procède de la façon suivante. Soient N une variété orientée et $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlas positif appartenant à la classe choisie.

Problème 6. (théorème de partition de l'unité). *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est un recouvrement ouvert de la variété M de classe C^k, il existe une famille de fonctions $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de classe C^l, $l = \min(k, \infty)$ qui possède les propriétés suivantes:*

1) $f_\alpha = 0$ en dehors de U_α;

2) $0 \leqslant f_\alpha \leqslant 1$ sur M;

3) $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha \equiv 1$ sur M.

Corollaire. La forme ω sur M est la somme des formes ω_α, telles que $\omega_\alpha = 0$ en dehors de U_α.

Posons par définition

$$\int_N \omega = \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \omega_\alpha .$$

On peut vérifier que cette valeur ne dépend pas du choix du recouvrement U_α et de la décomposition de ω en somme de ω_α.

On appelle *variété à bord* l'ensemble M dont chaque point possède un voisinage difféomorphe au voisinage de zéro soit dans $\mathbf{R}^n$, soit dans $\mathbf{R}^n_+$ (le demi-espace défini par la condition $x^n \geqslant 0$). L'ensemble des points du deuxième type est appelé bord de la variété M et désigné ∂M.

Si une variété à bord M est orientable, alors son bord ∂M l'est également et, pour un choix convenable d'orientations, on a la formule

$$\int_M \partial \omega = \int_{\partial M} \omega$$

pour toute forme différentielle de degré $n - 1$.

Pour la démonstration de cette formule et des renseignements ultérieurs voir les livres [58], [63].

5.4. Espaces fibrés.

La majorité des espaces vectoriels que l'on examine dans les applications de l'analyse fonctionnelle peuvent être considérés, d'un même point de vue, comme des espaces de sections de fibrés vectoriels sur les variétés différenciables. Tels sont, par exemple, les espaces de fonctions, de champs de vecteurs, de formes différentielles, etc.

Nous n'exposerons ici que les définitions et les faits fondamentaux de la théorie des fibrés vectoriels, en renvoyant le lecteur soucieux de détails au livre de Husemöller [32].

Nous citerons également la définition de la cohomologie à coefficients dans un faisceau et le théorème généralisé de Dolbeault.

Le lecteur peut trouver la démonstration de ce théorème et des renseignements ultérieurs sur la théorie des fasceaux dans l'ouvrage de R. Godement [25].

On appelle *fibré vectoriel* sur une variété différentiable M le couple $\mathscr{E} = (E, p)$, où E est une certaine variété et p une application de E sur M aux propriétés suivantes:

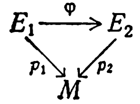
1) l'image inverse $p^{-1}(x)$ de chaque point $x \in M$ est munie d'une structure d'espace vectoriel sur K, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$;

2) chaque point $x \in M$ possède un voisinage U tel que $p^{-1}(U)$ admet sur $U \times K^n$ un difféomorphisme φ permutable à la projection sur U et linéaire sur chaque fibre $p^{-1}(x)$.

La variété E s'appelle *espace fibré*, l'espace K^n *fibre*, la variété M *base* et l'application p *projection* de l'espace fibré.

L'ensemble de tous les espaces fibrés sur M à fibre K^n forme une catégorie, dont les morphismes sont les diagrammes commu-

tatifs



où φ est un certain difféomorphisme linéaire sur chaque fibre.

A titre d'exemple d'espace fibré, citons le produit cartésien $M \times K^n$ avec la projection naturelle sur le premier facteur. Cet espace fibré, de même que tous les espaces fibrés lui étant équivalents, s'appellent *trivials.*

Chaque espace fibré s'obtient des espaces fibrés triviaux en les « collant » de la manière suivante. Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement de M par des ensembles ouverts. Choisissons dans les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$ des fonctions opératoires différentiables $g_{\alpha\beta}$ à valeurs dans Aut K^n, telles que

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} \equiv 1 \text{ dans } U_\alpha, \quad g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} \equiv 1 \text{ dans } U_\alpha \cap U_\beta, \\ g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} \equiv 1 \text{ dans } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous les appellerons *fonctions de passage* (ou *fonctions de transition*). Soit $\widetilde{E}$ la réunion des variétés $U_\alpha \times K^n$. Appelons les points $(x_\alpha, y_\alpha) \in U_\alpha \times K^n$ et $(x_\beta, y_\beta) \in U_\beta \times K^n$ équivalents si $x_\alpha = x_\beta$ et $y_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)\, y_\beta$. (Le fait que c'est effectivement une relation d'équivalence correspond à la condition (1) pour $g_{\alpha\beta}$.) Désignons par E l'ensemble quotient par cette relation d'équivalence et par p la projection de E sur M [l'application quotient de la projection naturelle de $\widetilde{E}$ sur M, qui envoie (x_α, y_α) sur x_α].

Problème 1. Démontrer que $\mathscr{E} = (E, p)$ est un fibré vectoriel sur M et que chaque fibré sur M est équivalent à un fibré de ce type.

Indication. Considérer le recouvrement de M par des ensembles U_α tels qu'il existe, d'après la condition 2), un difféomorphisme $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times K^n$, et poser $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Pour exemple de réalisation pratique de cette construction (pour $M = S^1$, $K^n = \mathbf{R}^1$) citons le « ruban de Möbius » formé de deux bandes de papier (fig. 1).

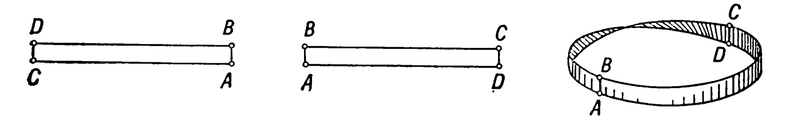


Fig. 1.

Problème 2. Soient $f_\alpha : U_\alpha \to \text{Aut } K^n$ des fonctions opératoires différentiables quelconques. Démontrer que les fibrés $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ définis par les fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$ et $g'_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1} \circ g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$ sont équivalents.

I n d i c a t i o n. L'équivalence cherchée φ: $E_1 \to E_2$ est l'application quotient de l'application $\tilde{\varphi}$: $\tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2$ donnée par la formule $\tilde{\varphi}(x_\alpha, y_\alpha) = (x_\alpha, f_\alpha(x_\alpha) y_\alpha)$.

On appelle *section* d'un espace fibré $\mathscr{E}$ sur un ouvert $U \subset M$ une application différentiable $s: U \to E$, telle que $p \circ s = 1$. (Parfois on appelle section l'image de U par l'application s.)

L'ensemble de toutes les sections de $\mathscr{E}$ sur U est noté $\Gamma(\mathscr{E}, U)$. Si $\mathscr{E}$ est un fibré trivial, alors $\Gamma(\mathscr{E}, U)$ s'identifie naturellement avec l'ensemble des fonctions vectorielles différentiables sur U à valeurs dans K^n.

Dans le cas général, lorsque le fibré $\mathscr{E}$ est donné par un recouvrement $\{U_\alpha\}$ et par des fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$, la section s est définie par une famille de fonctions vectorielles différentiables

$$s_\alpha : U \cap U_\alpha \to K^n,$$

que l'on appelle *composantes* de s et qui satisfont aux conditions

$$s_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) s_\beta(x), \qquad x \in U \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

Remarquons que $\Gamma(\mathscr{E}, U)$ est un module sur l'anneau $\mathscr{O}(U)$ des fonctions (numériques) différentiables sur U: la section $f \cdot s$ a pour composantes $(f \cdot s)_\alpha = f \cdot s_\alpha$.

P r o b l è m e 3. Démontrer que le fibré $\mathscr{E}$ à fibre K^n est trivial si et seulement s'il existe n sections $s_1, \ldots, s_n$ de $\Gamma(\mathscr{E}, M)$ linéairement indépendantes en chaque point $x \in M$.

I n d i c a t i o n. La nécessité est évidente. L'application de $M \times K^n$ dans E, donnée par la formule

$$(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \mapsto (\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n)(x),$$

entraîne la suffisance.

Soit TM l'ensemble de tous les vecteurs tangents à la variété M (c'est-à-dire $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$; voir 5.2).

En faisant correspondre au vecteur $\xi \in T_x M$ le point $x \in M$ on obtient la projection $p: TM \to M$.

P r o b l è m e 4. Démontrer que $\tau(M) = (TM, p)$ est un fibré vectoriel sur M à fibre $\mathbf{R}^n$, $n = \dim M$, et que $\Gamma(\tau(M), M)$ s'identifie naturellement avec l'espace des champs de vecteurs différenciables sur M.

I n d i c a t i o n. Soit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas sur M. Considérer un fibré défini par le recouvrement $\{U_\alpha\}$ et les fonctions de transition $g_{\alpha\beta} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_*$.

Le fibré $\tau(M)$ s'appelle *fibré tangent* de la variété M. Le *fibré cotangent* $\tau^*(M)$ et les *fibrés tensoriels* $\tau^{k,l}(M)$, dont les sections sont des champs de tenseurs mixtes de rang (k, l) sur M, se définissent d'une manière analogue.

Pour les fibrés vectoriels sur M on peut définir les opérations de *somme directe* et de *produit tensoriel*, qui se réduisent à la somme directe et au produit tensoriel des fonctions de transition correspondantes. Le fibré $\tau^{k,l}(M)$ est par exemple équivalent au produit tensoriel de k exemplaires de $\tau(M)$ par l exemplaires de $\tau^*(M)$.

Les classes d'équivalence des fibrés admettent elles aussi de telles opérations.

Soit $\mathcal{K}(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence des fibrés vectoriels complexes sur M. Considérons la catégorie des applications de l'ensemble $\mathcal{K}(M)$ dans les anneaux commutatifs, telles que la somme directe et le produit tensoriel des classes de fibrés deviennent respectivement la somme et le produit des éléments des anneaux. Il existe dans cette catégorie un objet universel initial $K(M)$. La correspondance $M \mapsto K(M)$ s'avère un foncteur contravariant de la catégorie des variétés dans celle des anneaux commutatifs. Il s'appelle K-foncteur (ou KO-foncteur pour les fibrés réels) et joue un rôle important dans les applications topologiques.

Soit M une variété complexe. Parmi les fibrés vectoriels complexes sur M on peut mettre à part la classe des *fibrés holomorphes* dont l'espace fibré est une variété complexe, et les difféomorphismes $\varphi: p^{-1}(U) \to U \times \mathbf{C}^n$ sont des applications holomorphes. Il est clair que le fibré $\mathcal{E}$ est holomorphe si et seulement s'il peut être construit à l'aide de fonctions de transition holomorphes.

Pour les fibrés holomorphes il est naturel de considérer les *sections holomorphes* sur les ensembles ouverts $U \subset M$ (c'est-à-dire les applications holomorphes $s: U \to E$ telles que $p \circ s = 1$). De telles sections se définissent par une famille d'applications holomorphes $s_\alpha: U_\alpha \to \mathbf{C}^n$ qui satisfont aux conditions (3). Si $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe, par $\Gamma(\mathcal{E}, U)$ nous désignerons l'ensemble des sections holomorphes de $\mathcal{E}$ sur U. La correspondance $U \mapsto \Gamma(\mathcal{E}, U)$, de même que dans le cas réel, définit un faisceau de modules sur le faisceau structural $\mathcal{O}$ de la variété M.

Citons à titre d'exemple la description de tous les fibrés holomorphes de dimension un sur la sphère de Riemann $\mathbf{CP}^1$.

P r o b l è m e 5. Chaque fibré holomorphe $\mathcal{E}$ de dimension 1 sur $\mathbf{C}$ est trivial.

I n d i c a t i o n. Ceci équivaut à l'existence d'une section $s \in \Gamma(\mathcal{E}, \mathbf{C})$ partout non nulle. Pour la démonstration de ce dernier fait (loin d'ailleurs d'être trivial) voir [24].

La sphère de Riemann $\mathbf{CP}^1$ peut être recouverte par deux voisinages U_1, U_2 isomorphes à $\mathbf{C}$, dont les paramètres canoniques sont liés par la relation $z_1 \cdot z_2 = 1$. D'après le problème 5, chaque fibré $\mathcal{E}$ sur $\mathbf{CP}^1$ se définit par une fonction de transition $g(z)$ holomorphe et non nulle sur $U_1 \cap U_2 = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

P r o b l è m e 6. Chaque fonction $g(z)$ holomorphe et non nulle partout dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ est de la forme

$$g_1(z) \cdot z^k \cdot g_2(z^{-1}),$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions holomorphes et non nulles partout sur $\mathbf{C}$.

En vertu des problèmes 5 et 6, chaque fibré holomorphe $\mathscr{E}$ sur $\mathbf{CP}^1$ est équivalent à un des fibrés $\mathscr{E}_k$ défini par les fonctions de transition $g(z) = z^k$, $k \in \mathbf{Z}$.

P r o b l è m e 7. Démontrer que $\tau(\mathbf{CP}^1) \approx \mathscr{E}_2$, $\tau^*(\mathbf{CP}^1) \approx \mathscr{E}_{-2}$.

I n d i c a t i o n. Les champs de vecteurs sur $\mathbf{C}$ sont de la forme $a(z) \frac{d}{dz}$ et les champs de covecteurs $b(z)\, dz$, où a et b sont des fonctions entières quelconques.

Il est évident que le produit tensoriel des fibrés $\mathscr{E}_k$ et $\mathscr{E}_l$ est équivalent au fibré $\mathscr{E}_{k+l}$. Par conséquent, les classes d'équivalence des fibrés holomorphes de dimension 1 sur $\mathbf{CP}^1$ forment par rapport au produit tensoriel un groupe cyclique.

L'isomorphisme de ce groupe à $\mathbf{Z}$ (tous les $\mathscr{E}_k$ ne sont pas équivalents deux à deux) découle du fait suivant.

P r o b l è m e 8. Démontrer que

$$\dim_{\mathbf{C}} \Gamma(\mathscr{E}_k, \mathbf{CP}^1) = \begin{cases} k+1 & \text{pour } k \geqslant 0, \\ 0 & \text{pour } k < 0. \end{cases}$$

Soit maintenant M une variété mixte. Parmi les fibrés vectoriels complexes sur M on peut considérer la classe des *fibrés vectoriels partiellement holomorphes* et de leurs *sections partiellement holomorphes*, de sorte que la correspondance $U \mapsto \Gamma(\mathscr{E}, U)$ soit un faisceau de modules sur le faisceau structural de la variété mixte M.

En termes de fonctions de transition et de composantes des sections, cela veut dire que

$$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \operatorname{Aut} \mathbf{C}^n,$$

$$s_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathbf{C}^n.$$

Dans des coordonnées convenablement choisies $x_1, \ldots, x_k$; $z_1, \ldots, z_l$ les fonctions $g_{\alpha\beta}$ et s_α seront respectivement des fonctions différenciables des variables réelles x_i et des fonctions holomorphes des variables complexes z_j.

Cette définition équivaut à déterminer d'une façon usuelle un fibré pour $l = 0$ et un fibré holomorphe pour $k = 0$.

Soient F un faisceau de groupes abéliens sur la variété M et $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement de M par des ensembles ouverts.

Définissons une cochaîne de dimension n du recouvrement $\mathfrak{U}$ à coefficients dans F comme une application c antisymétrique (changeant de signe pour chaque permutation de deux arguments) et envoyant la famille d'indices $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans l'élément $c(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in F(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n})$.

L'ensemble de toutes les cochaînes de dimension n est noté $C^n(\mathfrak{U}, F)$.

L'opérateur de cobord d: $C^n(\mathfrak{U}, F) \to C^{n+1}(\mathfrak{U}, F)$ se définit par la formule

$$dc(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i F(\varphi_i)\, c(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{n+1}),$$

où φ_i est l'inclusion de $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_{n+1}}$ dans $U_{\alpha_0} \cap \ldots \hat{U}_{\alpha_i} \ldots \ldots \cap U_{\alpha_{n+1}}$.

Si F est un *faisceau constant* (c'est-à-dire $F(U) \equiv \Pi$ pour $U \neq \varnothing$ et $F(\varphi) \equiv 1$ pour une inclusion quelconque $U \subset V$), alors la définition ci-dessus coïncide avec celle de cochaîne et d'opérateur de cobord donnée dans **1.3**. Les définitions de cobord, cocycle et cohomologie, qui y sont données, restent les mêmes pour des faisceaux quelconques.

Le théorème de Leray étant également valable pour les faisceaux quelconques reste donc un des instruments sûrs de calcul des cohomologies.

Une autre méthode de calcul consistant à considérer les groupes $H^k(M, F)$ comme foncteur de la catégorie des faisceaux sur M dans celle des groupes sera donnée dans un exemple à part (faisceau des sections partiellement holomorphes de fibrés sur une variété mixte).

Soit $\mathscr{E}$ un fibré partiellement holomorphe sur une variété mixte de type (k, l). Rappelons que, localement la variété M est un produit direct du voisinage de zéro dans $\mathbf{R}^k$ par un voisinage de zéro dans $\mathbf{C}^l$. Désignons par $h(M)$ le fibré complexe de dimension l sur M, ayant pour fibre l'espace tangent à la « partie complexe » de la variété M, et posons

$$\lambda^r(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \otimes \wedge^r \bar{h}^*(M),$$

où le petit trait indique la conjugaison complexe, $*$ le passage à l'espace dual et $\wedge^r$ le produit extérieur de degré r. Les sections des fibrés $\lambda^r(\mathscr{E})$ s'appellent *formes différentielles de type* $(0, r)$ *sur* M *à valeurs dans le fibré* $\mathscr{E}$. En coordonnées locales, elles sont de la forme

$$s = \sum_{i_1, \ldots, i_r} s_{i_1, \ldots, i_r}\, d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_r},$$

où $s_{i_1, \ldots, i_r}$ sont des fonctions différenciables des variables $x_1, \ldots, x_k, u_1, v_1, \ldots, u_l, v_l$ $(z_j = u_j + iv_j)$.

On peut définir un opérateur de cobord

$$\bar{\partial}_r : \Gamma(\lambda^r(\mathscr{E}), M) \to \Gamma(\lambda^{r+1}(\mathscr{E}), M),$$

qui agit dans les coordonnées locales suivant la formule

$$\bar{\partial}_r s = \sum_{i_1, \ldots, i_r} \bar{\partial} s_{i_1 \ldots i_r} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_r},$$

où $\bar{\partial} s = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial s}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$, et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} + i \frac{\partial}{\partial v_j}$.

Théorème généralisé de Dolbeault. *On a l'isomorphisme*

$$H^r(M, \Gamma_{\mathscr{E}}) = \ker \bar{\partial}_r / im \bar{\partial}_{r-1},$$

où $\Gamma_{\mathscr{E}}$ est un faisceau des sections partiellement holomorphes du fibré $\mathscr{E}$.

Problème 9. Démontrer que l'espace $H^0(M, \Gamma)$ coïncide avec l'espace des fonctions partiellement holomorphes du fibré $\mathscr{E}$.

Indication. La condition $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ équivaut aux conditions de Cauchy-Riemann assurant que f est holomorphe par rapport à z.

Problème 10. Calculer $H^r(\mathbf{CP}^1, \Gamma_{\mathscr{E}_k})$ (voir les problèmes 6-8).

Indication. Vu que $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{CP}^1 = 1$ et $H^0(\mathbf{CP}^1, \Gamma_{\mathscr{E}_k}) = \Gamma(\mathscr{E}_k, \mathbf{CP}^1)$ (voir problème 9), il suffit de considérer le cas $r = 1$. En posant $z = \rho e^{i\varphi}$ et en développant en suite de Fourier par rapport à φ, le problème considéré se ramène au suivant.

Déterminer pour quelles fonctions différentiables $b(\rho)$ sur $(0, \infty)$ vérifiant les conditions

1) $b(\rho) = O(\rho^{|m|})$ pour $\rho \to 0$,

2) $b(\rho) = O(\rho^{k-2-|k-2-m|})$ pour $\rho \to \infty$

il existe une solution $a(\rho)$ de l'équation

$$a' - \frac{m-1}{\rho} a = b,$$

qui satisfait aux conditions limites

3) $a(\rho) = O(\rho^{|m-1|})$ pour $\rho \to 0$,

4) $a(\rho) = O(\rho^{k-|k-m+1|})$ pour $\rho \to \infty$.

Réponse.

$$\dim_{\mathbf{C}} H^1(\mathbf{CP}^1, \Gamma_{\mathscr{E}_k}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \geqslant 0, \\ -(k+1) & \text{pour } k < 0. \end{cases}$$

§ 6. GROUPES DE LIE ET ALGÈBRES DE LIE

6.1. Groupes de Lie. L'ensemble G s'appelle groupe de Lie, s'il est à la fois un groupe topologique et une variété différenciable, tels que l'application $G \times G \xrightarrow{\varphi} G$, donnée par la formule $\varphi(x, y) = xy^{-1}$, est différenciable.

Nous ne précisons pas ici la notion de différenciabilité car en vertu du théorème de Gleason-Montgomery-Zippin (qui donne une solution positive du cinquième problème de Hilbert) chaque groupe de Lie de classe C^0 admet une structure de variété de classe C^ω, compatible avec sa structure de groupe.

R e m a r q u e. La différenciabilité de l'application φ dans la définition ci-dessus équivaut à celle des deux applications suivantes:

$$G \times G \xrightarrow{\psi} G: \ \psi(x, y) = xy$$

et

$$G \xrightarrow{\varepsilon} G: \ \varepsilon(x) = x^{-1}.$$

E x e m p l e s d e g r o u p e s d e L i e.

1. La droite réelle **R** avec l'opération d'addition.

2. Le cercle **T** avec l'opération de multiplication (si l'on suppose que **T** soit un cercle unité 1 du plan complexe **C**).

3. L'ensemble $GL(n, \mathbf{R})$ de toutes les matrices non dégénérées d'ordre n (considéré comme domaine de $\mathbf{R}^{n^2}$) avec l'opération de multiplication matricielle. Pour le cas particulier $n = 1$ on obtient $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ avec l'opération de multiplication.

4. Si G_1 et G_2 sont des groupes de Lie, leur produit $G_1 \times G_2$ l'est aussi. En particulier, $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{T}^n$ sont des groupes de Lie.

5. Le groupe des transformations affines d'une droite, muni de la topologie naturelle, est un groupe de Lie.

En effet, chaque transformation affine g est de la forme $g(x) = ax + b$, où $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$.

Les coordonnées (a, b) permettent d'identifier la variété du groupe avec le domaine de $\mathbf{R}^2$, qui s'en obtient en éliminant la droite $a = 0$. L'application φ, qui figure dans la définition du groupe de Lie, est donnée dans ces coordonnées par la formule

$$\varphi(a_1, b_1; a_2, b_2) = (a_1 a_2^{-1}; \ b_1 - b_2 a_1 a_2^{-1}).$$

6. Le groupe $\mathbf{H}^*$ des quaternions non nuls (voir **3.2**) avec l'opération de multiplication.

7. Les variétés dans les espaces des matrices définies dans **5.1** sont des groupes de Lie par rapport à l'opération de multiplication matricielle.

En effet, il est aisé de vérifier que les équations (1), (2), (3) de **5.1** définissent des groupes, c'est-à-dire que si les matrices x et y satisfont à ces équations,

les matrices x^{-1} et xy le font également. Vérifions si l'application $(x, y) \mapsto z = xy^{-1}$ est également différentiable.

D'après le théorème d'analyse, cité dans 5.1, pour coordonnées locales dans le voisinage des points x, y et $z = xy^{-1}$ on peut choisir une certaine collection d'éléments matriciels (propre à chaque voisinage). Les autres éléments matriciels seront alors des fonctions différentiables par rapport aux éléments choisis. Les coordonnées du point z s'expriment évidemment comme fonctions différentiables des éléments matriciels x et y^{-1}, qui le font à leur tour par rapport aux coordonnées des points x et y. (Nous faisons recours au fait que dans le domaine des matrices non dégénérées, les éléments de y^{-1} sont des fonctions différentiables des éléments de la matrice y.)

Problème 1. Démontrer que la sphère S^3 de dimension 3 admet une structure de groupe de Lie.

Indication. Réaliser S^3 sous forme de l'ensemble des quaternions de norme unité.

Problème 2. Démontrer que sur une sphère S^2 de dimension 2 on ne peut pas définir de structure de groupe de Lie.

Indication. Recourir au lemme topologique suivant: *chaque application continue homotope à une application identique d'une sphère de dimension 2 sur elle-même possède un point fixe.*

Parmi tous les exemples cités ci-dessus il y a deux groupes de Lie de dimension un: **R** et **T**.

Il s'avère qu'il n'existe pas d'autres groupes de Lie de dimension 1.

Problème 3. Chaque groupe de Lie G de dimension 1 est isomorphe à **R** ou à **T**.

Indication. Supposons d'abord que le groupe G soit difféomorphe à **R** et $x \in G$ un élément non unitaire. Démontrer que, pour chaque nombre rationnel $r = m/n$, il existe un élément unique $y \in G$, qui possède la propriété $y^n = x^m$. (Utiliser le fait que le produit de deux éléments de G est lié d'une manière monotone à chaque facteur.) Désignons cet élément par x^r. Démontrer que l'application $\mathbf{Q} \to G: r \mapsto x^r$ se prolonge à l'isomorphisme cherché $\mathbf{R} \to G$.

Dans le cas où G est difféomorphe à **T**, démontrer que pour chaque entier $m > 0$ il existe une inclusion $\mathbf{Z}_m \to G$ et que l'on peut choisir toutes ces inclusions de manière à prolonger l'application obtenue $\bigcup_m \mathbf{Z}_m = \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to G$ à l'isomorphisme cherché $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to G$.

Vu que chaque groupe de Lie possède des sous-groupes de dimension 1 ce résultat est donc largement utilisé. L'affirmation du problème 3 permet de choisir dans ces sous-groupes un *paramètre canonique* lié de la façon la plus naturelle à la loi de multiplication du groupe.

Problème 4. Indiquer la forme générale de l'homomorphisme de G_1 dans G_2, où chacun des groupes G_i coïncide avec **R** ou **T**.

Réponse: a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}: x \mapsto ax, \ a \in \mathbf{R}$;

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{T}: x \mapsto e^{i\lambda x}, \ \lambda \in \mathbf{R}$;

c) $\mathbf{T} \to \mathbf{R}: z \mapsto 0$;

d) $\mathbf{T} \to \mathbf{T}: z \mapsto z^n, \ n \in \mathbf{Z}$.

Soit G un groupe de Lie. Appelons composante connexe de l'unité de G l'ensemble G^0 de tous les éléments $g \in G$ que l'on peut joindre à l'unité par une courbe continue.

Problème 5. Démontrer que G^0 est un sous-groupe connexe, ouvert et fermé de G et que G^0 se définit d'une façon unique par ces propriétés.

Si G est un groupe de Lie connexe, mais non simplement connexe, alors on peut construire le groupe $\widetilde{G}$, dit revêtement universel du groupe G. Par définition, $\widetilde{G}$ est formé des classes d'équivalence des applications continues φ du segment $[0, 1]$ dans G vérifiant la condition $\varphi(0) = e$.

Les applications φ_1 et φ_2 sont équivalentes, s'il existe une famille d'applications $\varphi_t\colon [0, 1] \to G$ telle que $\varphi_t(0) \equiv e$, $\varphi_t(1) \equiv \varphi_0(1)$ et l'application

$$[0, 1] \times [0, 1] \to G\colon (t, x) \mapsto \varphi_{t(x)}$$

est continue.

Désignons par $[\varphi]$ la classe de l'application φ. L'ensemble des applications φ peut être muni de la topologie de la convergence uniforme et $\widetilde{G}$ de la topologie quotient correspondante.

Déterminons la projection $p\colon \widetilde{G} \to G$ en posant $p([\varphi]) = \varphi(1)$.

Problème 6. Démontrer que l'application p est un homéomorphisme local.

Déterminons une loi de multiplication dans $\widetilde{G}$ en posant $[\varphi_1] \times \times [\varphi_2] = [\varphi]$, où

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(2x), & \text{si } x \leqslant 1/2, \\ \varphi_1(1)\varphi_2(2x-1), & \text{si } x \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Problème 7. Vérifier que cette loi munit $\widetilde{G}$ d'une structure de groupe de Lie et que la projection p est un homomorphisme de $\widetilde{G}$ sur G.

Indication. Utiliser le résultat du problème précédent.

Problème 8. Démontrer que le groupe $\widetilde{G}$ est connexe et simplement connexe.

Nous verrons plus loin que le groupe $\widetilde{G}$ se définit d'une façon unique par les propriétés citées dans les problèmes 6, 7 et 8. (Voir le théorème de monodromie dans **6.3**.) Nous laissons au lecteur le soin de formuler la définition du revêtement universel comme objet universel dans une catégorie appropriée.

Pour conclure citons sans démonstration deux propriétés importantes des groupes de Lie.

Théorème 1. *Chaque sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est lui-même un groupe de Lie.*

Théorème 2. *Si G est un groupe de Lie et H son sous-groupe fermé, G/H est une variété différentiable sur laquelle le groupe G agit par transformations différentiables. (En particulier, si H est un sous-groupe invariant, alors G/H est un groupe de Lie.)*

Pour la démonstration de ces théorèmes et d'autres renseignements concernant les groupes de Lie voir les livres [46], [30], [10].

6.2. Algèbres de Lie. La notion d'algèbre de Lie (dans l'ancienne terminologie — *groupe de Lie infinitésimal*) a fait son apparition lors de l'étude des groupes de Lie, pour devenir ensuite l'objet d'une théorie indépendante. Nous n'exposerons ici que quelques notions de cette théorie.

On appelle *algèbre de Lie* sur un corps K un espace vectoriel L sur K, muni d'une opération supplémentaire, notée $[x, y]$ et appelée *commutation*, qui satisfait aux conditions suivantes:

1) elle est bilinéaire;
2) elle est antisymétrique: $[x, x] = 0$ pour tout $x \in L$;
3) elle satisfait à l'identité de Jacobi:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

pour $x, y, z \in L$.

Problème 1. Démontrer que les deux premières propriétés ci-dessus entraînent l'égalité $[x, y] = -[y, x]$ pour tous les $x, y \in L$.

Pour définir une structure d'algèbre de Lie sur un espace L, il suffit de connaître les commutateurs pris deux à deux des vecteurs de base $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire les coefficients c_{ij}^k dans les expressions

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k.$$

Ces coefficients s'appellent *constantes structurales* de l'algèbre L. D'après le résultat du problème 1, nous avons l'égalité $c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0$, de sorte qu'il suffit de connaître $\frac{n^2(n-1)}{2}$ constantes structurales c_{ij}^k pour lesquelles $i < j$.

Problème 2. Démontrer que si les éléments x, y, z sont linéairement dépendants, l'identité de Jacobi découle des deux premières conditions ci-dessus.

Par conséquent, pour qu'une collection de nombres $\{c_{ij}^k\}_{i<j}$ soit la famille des constantes structurales d'une certaine algèbre de Lie, il suffit de vérifier $n(n-1)(n-2)/6$ égalités, les identités de Jacobi pour les triplets x_i, x_j, x_k, tels que $i < j < k$. Notons que l'identité de Jacobi est vectorielle, équivalente à n égalités numériques, de sorte que la variété de toutes les familles de constantes structurales soit donnée par $n^2(n-1)(n-2)/6$ équations du second degré de $n^2(n-1)/2$ variables indépendantes.

Exemple. L'espace $\mathbf{R}^3$, ayant le produit vectoriel pour commutateur, est une algèbre de Lie sur $\mathbf{R}$. En effet, les propriétés 1) et 2) étant évidentes, il suffit donc de vérifier l'identité de Jacobi dans le cas où x, y, z forment une base orthonormée à orientation positive. Dans ce cas, $[x, y] = z$, $[y, z] = x$, $[z, x] = y$ et l'identité de Jacobi s'avère vérifiée.

Tout espace vectoriel muni d'un commutateur identiquement nul en est un exemple encore plus simple. Une telle algèbre de Lie s'appelle *commutative* ou *abélienne*.

Un grand nombre d'exemples admet une construction analogue.

Problème 3. Soit A une algèbre associative sur K; posons pour $x, y \in A$

$$[x, y] = xy - yx.$$

Démontrer que l'espace A, avec une telle opération de commutation, est une algèbre de Lie.

Problème 4. On appelle différentiation d'une algèbre A sur K (non nécessairement associative) chaque application linéaire $D: A \to A$ qui possède la propriété

$$D(xy) = D(x)\, y + xD(y).$$

Démontrer que l'espace de toutes les différentiations de l'algèbre A est une algèbre de Lie sur K par rapport à l'opération

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1.$$

Corollaire. *L'ensemble* Vect M *des champs de vecteurs différentiables sur la variété M est une algèbre de Lie sur* $\mathbf{R}$ *par rapport à l'opération de commutation.*

Dans ce cas le rôle de l'algèbre A revient à $C^\infty(M)$.

Les algèbres de Lie sur un corps K forment une catégorie dont les morphismes sont les *homomorphismes d'algèbres de Lie*, c'est-à-dire les applications linéaires $\varphi: L_1 \to L_2$, qui possèdent la propriété

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

pour $x, y \in L_1$ quelconques.

Un homomorphisme de L_1 dans L_2 s'appelle également *représentation* de L_1 dans L_2. En particulier, si L_2 est une algèbre de Lie d'opérateurs linéaires dans un espace vectoriel H (par rapport à l'opération $[A, B] = AB - BA$), on dit que φ est une *représentation linéaire* de L_1 dans l'espace H. Le terme « linéaire » est souvent omis.

Le théorème suivant a lieu.

Théorème d'Ado. *Chaque algèbre de Lie de dimension finie possède une représentation linéaire exacte de dimension finie.*

Ce théorème important permet de réduire les démonstrations des théorèmes sur les algèbres de Lie au cas d'algèbres matricielles de Lie.

On appelle *centre* d'une algèbre de Lie L l'ensemble des éléments $x \in L$, tels que $[x, y] = 0$ pour tout $y \in L$.

Problème 5. Soit L une algèbre de Lie. Pour chaque $x \in L$ notons $\operatorname{ad} x$ l'opérateur dans L, donné par la formule

$$\operatorname{ad} x\,(y) = [x, y].$$

Démontrer que $\operatorname{ad} x$ est une différentiation de l'algèbre de Lie, que l'application $x \mapsto \operatorname{ad} x$ est une représentation de l'algèbre de Lie L dans l'espace L (cette représentation est dite *régulière*) et que le noyau de cette représentation coïncide avec le centre de L.

Exemple. Soit $L = \mathbf{R}^3$ l'algèbre de Lie considérée plus haut. Dans ce cas la représentation régulière est de la forme

$$\operatorname{ad}(ax + by + cz) = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'algèbre de Lie L est isomorphe à l'algèbre de Lie de toutes les matrices antisymétriques d'ordre trois.

Enumérons les algèbres de Lie de petite dimension sur $\mathbf{R}$.

I. $\dim L = 1$. Il existe une seule algèbre de Lie de dimension 1, la droite $\mathbf{R}$ à commutateur nul.

II. $\dim L = 2$. Soit x, y une base de L. Si $[x, y] = 0$, alors le commutateur de deux éléments quelconques est nul. Mais si $[x, y] = z \neq 0$, alors le commutateur de deux vecteurs quelconques est proportionnel à z. En particulier, il existe un vecteur t, tel que $[t, z] = z$.

Il existe donc deux algèbres de Lie non isomorphes de dimension 2.

III. $\dim L = 3$. Considérons l'espace $L_1 \subset L$ engendré par tous les commutateurs.

Si $\dim L_1 = 0$, tous les commutateurs sont alors nuls.

Si $\dim L_1 = 1$, alors $[x, y] = B(x, y)\, z$, où z est un vecteur fixe, et $B(x, y)$ est une forme bilinéaire antisymétrique dans L. Les deux cas suivants peuvent alors se présenter:

1) $B(x, z) = 0$ pour tout $x \in L$; alors L possède une base x, y, z avec les relations de commutation $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$.

2) Il existe un vecteur $x \in L$, tel que $B(x, z) = 1$; dans ce cas il existe une base x, y, z aux relations de commutation $[x, y] = [y, z] = 0$, $[x, z] = z$.

Supposons que $\dim L_1 = 2$. Il est à remarquer que le sous-espace L_1 est lui-même une algèbre de Lie, car L_1 contient tous les commutateurs. Mais nous savons déjà qu'il existe exactement deux algèbres de Lie de dimension deux avec les relations de commutation $[x, y] = 0$ et $[x, y] = y$ respectivement. Soit z un vecteur complétant

les vecteurs x et y à une base de L. L'opérateur ad z est une différentiation de l'algèbre L_1.

Dans le cas $[x, y] = y$, il en découle que l'opérateur ad z est de la forme $x \mapsto ay$, $y \mapsto by$, ce qui contredit la condition dim $L_1 = 2$.

Dans le cas $[x, y] = 0$, il n'y a aucune restriction: ad z peut bien être une matrice A (d'ordre deux) quelconque. Notons néanmoins que la condition dim $L_1 = 2$ implique que la matrice A soit non dégénérée.

Problème 6. Démontrer que les matrices A et B définissent les algèbres de Lie isomorphes, si et seulement s'il existe une matrice non dégénérée C et un nombre non nul c, tels que

$$cA = CBC^{-1}.$$

Ainsi, dans le cas dim $L_1 = 2$, nous avons obtenu toute une famille d'algèbres de Lie, paramétrisée, à équivalence près, par les matrices non dégénérées d'ordre deux, l'équivalence étant donnée par la formule (1).

Donnons, enfin, sans démonstration pour le cas dim $L_1 = 3$, c'est-à-dire $L_1 = L$, la conclusion définitive [qui se déduit de la théorie des algèbres de Lie semi-simples (voir plus loin)]. Il existe deux algèbres de Lie non isomorphes de dimension trois pour lesquelles $L_1 = L$. Leurs relations de commutation sont de la forme

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y$$

et

$$[x, y] = 2y, \quad [x, z] = -2z, \quad [y, z] = x.$$

La première algèbre de Lie ci-dessus est celle des matrices antisymétriques d'ordre trois, qui nous est déjà familière. La deuxième, comme on le vérifie aisément, est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices d'ordre deux de trace nulle:

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La classification des algèbres de Lie de dimension quatre peut en principe être obtenue par des raisonnements ad hoc du même genre, mais les calculs correspondants et la réponse définitive sont trop longs pour les citer ici.

Au lieu de ceux-ci nous introduirons quelques notions générales, facilitant la classification des algèbres de Lie de dimension quelconque.

Un sous-espace M de l'algèbre de Lie L s'appelle *sous-algèbre* (respectivement *idéal*), si $[M, M] \subset M$ (respectivement $[L, M] \subset M$). (Ici, et dans ce qui suit, la notation $[L, M]$ signifie l'enveloppe linéaire des vecteurs de la forme $[x, y]$, $x \in L$, $y \in M$.) Si M est un idéal de L, l'espace quotient L/M se munit naturellement d'une

structure d'algèbre de Lie, que l'on appelle *algèbre quotient* de l'algèbre L par l'idéal M.

Dans chaque algèbre de Lie L on peut définir deux suites de sous-espaces

$$L_1 = [L, L], \quad L_2 = [L, L_1], \ldots, L_{n+1} = [L, L_n], \ldots,$$
$$L^1 = [L, L], \quad L^2 = [L^1, L^1], \ldots, L^{n+1} = [L^n, L^n], \ldots$$

Il est évident que nous avons les inclusions:

$$\begin{array}{ccccccccc} L_1 & \supset & L_2 & \supset & L_3 & \supset \ldots \supset & L_n & \supset & \ldots \\ \| & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ L^1 & \supset & L^2 & \supset & L^3 & \supset \ldots \supset & L^n & \ldots & \end{array}$$

Problème 7. Démontrer que tous les sous-espaces L^n et L_n sont des idéaux dans L et que les algèbres quotients L_n/L_{n+1} et L^n/L^{n+1} sont commutatives.

Si $\dim L < \infty$, alors les suites $\{L_n\}$ et $\{L^n\}$ se stabilisent: à partir d'un certain n, $L_n = L_{n+1} = \ldots = L_\infty$ et $L^n = L^{n+1} = \ldots = L^\infty$.

L'algèbre de Lie s'appelle *résoluble* (respectivement *nilpotente*), si $L^\infty = \{0\}$ (respectivement si $L_\infty = \{0\}$).

Le plus petit nombre n pour lequel $L^n = \{0\}$ (respectivement $L_n = \{0\}$) s'appelle *rang de résolvabilité* (respectivement *de nilpotence*) de l'algèbre L.

A titre d'exemple d'algèbre de Lie résoluble (respectivement nilpotente), citons l'algèbre $T(n, K)$ (respectivement $T_0(n, K)$) des matrices d'ordre n à coefficients dans K, qui satisfont à la condition $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ (respectivement pour $i \geqslant j$).

Une des propriétés les plus importantes des algèbres de Lie résolubles s'exprime par le théorème suivant.

Théorème de Lie. *Soit ρ une représentation de dimension finie de l'algèbre de Lie L résoluble dans l'espace V sur un corps algébriquement fermé K. La représentation ρ est alors équivalente à une représentation triangulaire, c'est-à-dire telle que toutes les matrices $\rho(x)$, $x \in L$, sont comprises dans $T(n, K)$.*

La démonstration découle des problèmes suivants.

Problème 8. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des opérateurs commutant deux à deux dans l'espace V sur un corps algébriquement fermé. Il existe un vecteur $\xi \in V$ propre à tous les opérateurs A_k.

Indication. Pour un seul opérateur A_1 un tel vecteur existe, puisque l'équation $\det(A - \lambda\cdot 1) = 0$ possède au moins une racine λ_1.

Démontrer que l'espace V_1 de toutes les solutions de l'équation

$$A_1\xi = \lambda_1\xi$$

est invariant par rapport à $A_2, \ldots, A_n$ et raisonner par récurrence.

Problème 9. Dans les hypothèses du théorème de Lie, démontrer que tous les opérateurs $\rho(x)$, $x \in L$ ont un vecteur propre commun.

Indication. Recourir à la méthode de résolution du problème 8 et raisonner par récurrence sur le rang de résolvabilité de L.

Le théorème de Lie se déduit du résultat du problème 9 par récurrence sur la dimension de V.

Corollaire. *Si L est une algèbre de Lie résoluble, la sous-algèbre $[L, L]$ est nilpotente.*

La terminologie « algèbre résoluble » est empruntée de la théorie des groupes de Lie résolubles, appelés ainsi à cause de leurs liens aux équations différentielles résolubles en quadratures (de même que les groupes finis résolubles sont liés aux équations algébriques résolubles en radicaux). Voir à ce sujet le livre de I. Kaplanski [37].

La terminologie « algèbre de Lie nilpotente » s'explique par le fait suivant.

Théorème d'Engel. *Une algèbre de Lie est nilpotente si et seulement si, pour chaque $x \in L$, l'opérateur* ad x *est nilpotent* (c'est-à-dire *que* $(\mathrm{ad}\, x)_n = 0$ *pour un certain n*).

Les classes d'algèbres de Lie nilpotentes et résolubles admettent une autre définition. Considérons les suites croissantes d'idéaux construites d'après les règles suivantes:

$$M_0 = M^0 = \{0\},$$

M_{n+1} est le plus grand des idéaux J contenant M_n et tels que l'algèbre quotient J/M_n est commutative;

M^{n+1} est un idéal contenant M^n tel que l'algèbre quotient M^{n+1}/M^n est le centre de l'algèbre de Lie L/M^n.

Il est évident que l'on a les inclusions suivantes:

$$\begin{array}{ccccccc} M^1 & \subset & M^2 & \subset \ldots \subset & M^n & \subset, \\ \cap & & \cap & & \cap & \\ M_1 & \subset & M_2 & \subset \ldots \subset & M_n & \subset . \end{array}$$

Si $\dim L < \infty$, à partir d'un certain n, on a $M^n = M^{n+1} = \ldots$ $\ldots = M^\infty$ et $M_n = M_{n+1} = \ldots = M_\infty$.

Problème 10. Démontrer que l'algèbre L est résoluble (respectivement nilpotente), si et seulement si $M_\infty = L$ (respectivement $M^\infty = L$).

L'algèbre de Lie s'appelle *simple* (respectivement *semi-simple*), si elle ne contient pas d'idéaux non triviaux (respectivement d'idéaux non triviaux commutatifs).

Problème 11. Démontrer que chaque algèbre de Lie L de dimension finie a un idéal R résoluble tel que l'algèbre quotient $S = L/R$ est semi-simple.

Indication. Considérer l'idéal résoluble maximal (c'est-à-dire l'idéal résoluble n'est pas contenu dans aucun idéal résoluble plus grand).

En fait, on a même le théorème plus fort suivant.

Théorème (E. Cartan-Levi-Maltsev). *Tous les idéaux résolubles de l'algèbre L sont contenus dans un seul idéal résoluble R (dit radical de l'algèbre L). Il existe une sous-algèbre $S \subset L$ semi-simple, telle que $L = S \oplus R$* (somme directe d'espaces vectoriels). *Deux sous-algèbres de S quelconques possédant cette propriété se transforment l'une dans l'autre par un automorphisme de l'algèbre L, qui laisse R invariant.*

Par conséquent, l'étude des algèbres de Lie dans le cas général se réduit, dans une grande mesure, à étudier les algèbres résolubles et semi-simples.

Bien que les algèbres de Lie résolubles possèdent, semblerait-il, une structure plus simple, on n'est quand même pas arrivé jusqu'à présent à les classifier.

Ce problème a, comme on le sait, pour le cas particulier celui de la réduction simultanée à la forme canonique de k matrices, problème qui n'est pas résolu même pour $k = 2$.

Un moyen efficace pour étudier les algèbres de Lie est la *forme bilinéaire de Killing*:

$$B(x, y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, y). \quad (2)$$

Problème 12. Démontrer que la forme de Killing est invariante par rapport à tous les automorphismes de l'algèbre de Lie.

Problème 13. Démontrer que la forme de Killing est identiquement nulle si et seulement si l'algèbre de Lie est nilpotente.

Indication. Recourir au théorème d'Engel.

Problème 14 (critère de Cartan). La forme de Killing est non dégénérée si et seulement si l'algèbre de Lie est semi-simple.

Indication. Si J est un idéal de l'algèbre de Lie L, la forme de Killing de l'algèbre de Lie J coïncide avec la restriction à J de la forme de Killing de l'algèbre L. D'où découle la première affirmation du problème; la démonstration de l'autre se ramène au cas d'une algèbre simple. Faire ensuite appel au fait que le noyau de la forme de Killing est un idéal de l'algèbre de Lie.

Toutes les algèbres de Lie semi-simples sont totalement classifiées.

On sait que chaque algèbre de Lie semi-simple est une somme directe d'idéaux simples.

Il existe sur les corps **C** quatre séries infinies et cinq algèbres de Lie simples « singulières ». Il existe sur le corps **R** 12 séries infinies et 23 algèbres simples « singulières ».

Il est à remarquer que toutes les algèbres faisant partie des séries infinies (on les appelle *algèbres simples classiques*) peuvent être réalisées comme algèbres de matrices (à éléments de **R**, **C** ou **H**) vérifiant les conditions algébriques fort simples.

Notons 1_n la matrice unité d'ordre n. Posons

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}.$$

Les algèbres simples classiques complexes sont:

1) A_n — l'algèbre de toutes les matrices complexes d'ordre $n+1$ à trace nulle; $n = 1, 2, \ldots$;

2) B_n — l'algèbre des matrices complexes antisymétriques d'ordre $2n+1$; $n = 2, 3, \ldots$ (B_1 est isomorphe à A_1);

3) C_n — l'algèbre des matrices complexes *canoniques* d'ordre $2n$ (c'est-à-dire des matrices qui satisfont à l'équation $X'J_{2n} + J_{2n}X = 0$); $n = 3, 4, \ldots$ ($C_1 \approx A_1 \approx B_1$, $C_2 \approx B_2$);

4) D_n — l'algèbre des matrices complexes antisymétriques d'ordre $2n$; $n = 4, 5, \ldots$, (D_1 est commutative, $D_2 \approx A_1 \oplus A_1$, $D_3 \approx A_3$).

Toutes ces algèbres sont aussi bien des algèbres simples sur le corps **R**. Après complexification (c'est-à-dire après multiplication tensorielle par **C** sur **R**) les autres algèbres classiques réelles restent simples et s'appellent *absolument simples*. Une algèbre réelle L absolument simple s'appelle *forme réelle* de l'algèbre complexe simple $L_{\mathbf{C}}$, si $L_{\mathbf{C}} = L \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

Les formes réelles de l'algèbre A_n sont:

a) l'algèbre des matrices réelles d'ordre $n+1$ à trace nulle;

b) l'algèbre des matrices complexes d'ordre $n+1$ qui satisfont aux conditions $\operatorname{tr} X = 0$ et $X^*I_{p,q} + I_{p,q}X = 0$, où $p+q = n+1$, $p \geqslant q$;

c) (pour n impair) l'algèbre des matrices quaternioniennes d'ordre $(n+1)/2$, qui satisfont à la condition $\operatorname{tr}(X + X^*) = 0$.

Les formes réelles de l'algèbre B_n sont les algèbres de matrices réelles d'ordre $2n+1$, qui satisfont à la condition $X'I_{p,q} + I_{p,q}X = 0$, où $p+q = 2n+1$, $p > q$.

Formes réelles de l'algèbre C_n:

a) l'algèbre des matrices réelles canoniques d'ordre $2n$;

b) l'algèbre des matrices quaternioniennes d'ordre n, qui satisfont à la condition $X^*I_{p,q} + I_{p,q}X = 0$, où $p+q = n$, $p \geqslant q$.

Formes réelles de l'algèbre D_n:

a) algèbres des matrices réelles d'ordre $2n$, qui satisfont aux conditions $X'I_{p,q} + I_{p,q}X = 0$, où $p+q = 2n$, $p \geqslant q$;

b) (pour n pair) l'algèbre des matrices quaternioniennes d'ordre n qui satisfont à la condition $X^*J_{2n} + J_{2n}X = 0$.

De nombreux faits se rapportant à la théorie des algèbres de Lie semi-simples furent d'abord établis pour les algèbres classiques; ce n'est que plus tard que l'on élabora les méthodes pour aborder l'étude de toutes les algèbres de Lie semi-simples.

La structure des algèbres de Lie semi-simples s'avère liée à une notion géométrique fort remarquable : les systèmes de racines dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Nous citerons ici quelques définitions et faits fondamentaux se rapportant à cette liaison.

Un ensemble fini Σ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ s'appelle *système de racines*, si

1) $$\frac{2(x, y)}{(x, x)} \in \mathbf{Z} \text{ quels que soient } x, y \in \Sigma,$$

2) $$y - \frac{2(x, y)}{(x, x)} x \in \Sigma \text{ quels que soient } x, y \in \Sigma.$$

Ici (x, y) désigne le produit scalaire normal dans $\mathbf{R}^n$: $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Du point de vue géométrique, ces conditions signifient que

1) les angles compris entre les vecteurs de Σ ne peuvent être que 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, π, tandis que le rapport des carrés des longueurs de deux vecteurs non parallèles et non perpendiculaires est égal à 1, 2 ou 3, selon l'angle compris entre eux;

2) le système de vecteurs Σ est invariant par rapport aux transformations $\sigma(x)$: $y \mapsto y - \frac{2(x, y)}{(x, x)} x$ qui sont des réflexions dans les hyperplans orthogonaux aux vecteurs $x \in \Sigma$.

Le groupe fini W engendré par les réflexions $\sigma(x)$, $x \in \Sigma$ s'appelle *groupe de Weyl* du système Σ. Appelons le vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ régulier s'il n'est pas orthogonal à aucun vecteur de Σ. L'ensemble de tous les vecteurs réguliers se décompose en $|W|$ composantes connexes appelées *chambres de Weyl*. Fixons une chambre de Weyl quelconque C. Cette chambre est un cône convexe, limité par des parties des hyperplans $(x, x_i) = 0$, $x_i \in \Pi$, où Π est un sous-système de Σ appelé *système de racines simples*. Chaque racine $x \in \Sigma$ est une combinaison à coefficients entiers des racines simples x_i, dont les coefficients sont d'un même signe, de sorte que $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ où Σ_+ (Σ_-) est l'ensemble des racines positives (négatives) qui possèdent des coefficients positifs (négatifs).

Appelons le système Σ *non dégénéré*, si Σ engendre tout l'espace $\mathbf{R}^n$, et *réduit*, si $x \in \Sigma$ entraîne $2x \notin \Sigma$.

On peut montrer qu'un système réduit non dégénéré de racines $\sum$ se définit entièrement par son sous-système de racines simples Π et que l'ensemble $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ est un système de racines simples si et seulement si Π possède les propriétés:

1) $\frac{2(x, y)}{(x, x)}$ est un entier non positif, quels que soient $x, y \in \Pi$;

2) Π est une base de $\mathbf{R}^n$.

Il est commode de se donner le système Π sous forme de *diagrammes de Dynkine* d'après la règle suivante: les sommets du diagramme correspondent

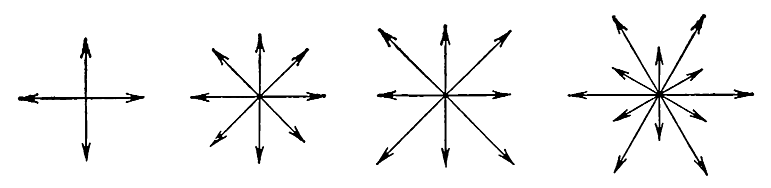


Fig. 2

aux éléments de Π; les sommets a_i et a_j sont réunis par un trait simple (respectivement double, triple), si les vecteurs correspondants forment un angle de 120° (respectivement 135°, 150°); les traits doubles et triples sont munis d'une flèche pour indiquer la plus petite racine.

A chaque algèbre de Lie complexe semi-simple L correspond un certain système réduit non dégénéré de racines.

Aux algèbres de Lie simples correspondent alors des systèmes de racines indécomposables (c'est-à-dire qui ne se mettent pas sous la forme de réunion de deux sous-ensembles orthogonaux).

Problème 15. Tous les systèmes réduits non dégénérés imaginables de racines de dimension deux sont représentés sur la fig. 2.

Indication. Utiliser le fait que tous les schémas de Dynkine de dimension deux sont les suivants



Fig. 3.

Ces systèmes correspondent aux algèbres classiques $A_1 \oplus A_1$, A_2, B_2 et à l'algèbre singulière G_2.

La correspondance dont il s'agit est définie de la façon suivante.

Soit L une algèbre de Lie et $x \in L$. Considérons le polynôme en λ:

$$\det(\mathrm{ad}\, x-\lambda\cdot 1)=\sum_{l=0}^{\dim L} p_l(x)\,\lambda^l.$$

Les coefficients $p_l(x)$ de ce polynôme sont évidemment des fonctions polynomiales sur L.

On appelle *rang de l'algèbre* L (notation: $\mathrm{rg}\, L$) le plus petit des nombres l, tels que le coefficient $p_l(x)$ n'est pas identiquement nul. Les éléments $x \in L$ pour lesquels $p_{\mathrm{rg}\, L}(x) \neq 0$ s'appellent *réguliers*.

Problème 16. Démontrer que le rang des algèbres A_n, B_n, C_n, D_n est égal à n.

Indication. Recourir au fait que les éléments réguliers forment un sous-ensemble ouvert dense dans L, invariant par rapport à tous les automorphismes de L.

On appelle *sous-algèbre de Cartan* de l'algèbre L une sous-algèbre résoluble maximale contenant un élément régulier. La dimension de la sous-algèbre de Cartan est égale au rang de L.

Dans les algèbres de Lie semi-simples les sous-algèbres de Cartan sont commutatives et coïncident avec les centralisateurs de leurs éléments réguliers.

Si H est une sous-algèbre de Cartan dans une algèbre de Lie L semi-simple complexe, alors tous les opérateurs $\mathrm{ad}\, x$, $x \in H$ peuvent simultanément être diagonalisés. Par conséquent, dans une base convenable x_α nous avons les conditions

$$[x, x_\alpha] = \lambda_\alpha(x)\, x_\alpha, \quad x \in H.$$

Les valeurs propres $\lambda_\alpha(x)$ sont évidemment des formes linéaires sur H. Puisque la forme de Killing sur L est non dégénérée, on peut trouver des éléments $\mu_\alpha \in L$ tels que

$$\lambda_\alpha(x) = B(\mu_\alpha, x).$$

Soit R le sous-espace réel de L, engendré par tous les μ_α.

On peut démontrer que R est un sous-espace de H de dimension l et que la restriction de la forme B sur R est positive. Soit Σ l'ensemble des vecteurs non nuls μ_α (leur nombre est égal à $\dim L - \mathrm{rg}\, L$). Alors Σ est un système réduit non dégénéré de racines dans R.

La structure de l'algèbre de Lie L est entièrement définie par les relations suivantes:

$$[x_\alpha, x_\beta]=\begin{cases} N_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}, & \text{si } \alpha+\beta \in \Sigma,\\ B(x_\alpha, x_{-\alpha})\,\mu_\alpha, & \text{si } \alpha+\beta=0,\\ 0 & \text{dans les autres cas.}\end{cases}$$

(Les constantes $N_{\alpha\beta}$, à un choix approprié de la norme des x_α, peuvent être rendues entières et se déterminent ensuite à partir du système de racines.)

Pour un exposé détaillé de la théorie des algèbres de Lie et, en particulier, la classification des algèbres de Lie semi-simples, voir les livres [35], [54].

6.3. Liaison entre les groupes de Lie et les algèbres de Lie. Il existe bien de méthodes pour construire une algèbre de Lie à partir d'un groupe de Lie. Nous exposerons ici quatre méthodes.

La première méthode consiste à étudier la fonction $\psi(x, y)$ qui donne la loi de multiplication du groupe de Lie G dans un voisinage de l'unité du groupe. Choisissons une carte quelconque, pour laquelle l'unité du groupe est l'origine des coordonnées. Alors, la fonction ψ possède les propriétés $\psi(x, 0) = \psi(0, x) = x$. Par conséquent, le développement de cette fonction en une série de Taylor est de la forme

$$\psi(x, y) = x + y + B(x, y) + \ldots, \tag{1}$$

où $B(x, y)$ est une forme vectorielle bilinéaire des vecteurs x et y, et les points de suspension désignent les termes d'ordre $\geqslant 3$.

Définissons maintenant un commutateur dans $\mathbf{R}^n$, $n = \dim G$, par la formule

$$[x, y] = B(x, y) - B(y, x). \tag{2}$$

Vérifions l'identité de Jacobi. Faisons recours à l'égalité $\psi(\psi(x, y), z) = \psi(x, \psi(y, z))$ (associativité de la multiplication du groupe). Développant les deux membres de cette égalité en séries de Taylor et comparant leurs termes linéaires (par rapport à chacun des vecteurs x, y, z), nous obtenons

$$(B(B(x, y), z) = B(x, B(y, z)). \tag{3}$$

D'autre part, en substituant au premier membre de l'identité de Jacobi l'expression (2) pour le commutateur, on obtient

$$[[x, y], z] = B(B(x, y), z) - B(z, B(x, y)) + \\ + B(z, B(y, x)) - B(B(y, x), z),$$

ce qui, d'après (3), est égal à

$$B(x, B(y, z)) - B(z, B(x, y)) + B(z, B(y, x)) - B(y, B(x, z)).$$

Si, dans cette expression, nous faisons une permutation cyclique de x, y, z et prenons la somme de toutes les expressions obtenues, il est évident que tous les termes s'annulent deux à deux, C.Q.F.D.

Problème 1. Montrer que le choix d'une autre carte donne une algèbre de Lie isomorphe et que la matrice de l'opérateur qui établit l'isomorphisme est de la forme $a^i_j = \partial x^i / \partial y^j$, où $\{x^i\}$, $\{y^j\}$ sont les coordonnées dans les cartes choisies.

La *deuxième méthode* introduit une structure d'algèbre de Lie dans l'espace tangent T_eG du groupe G au point e. Dans ce qui suit cet espace sera noté $\mathfrak{g}$. Soient $x(t)$, $y(t)$ deux courbes différentiables, issues du point e. Considérons la courbe

$$z(t) = x(\tau) * y(\tau) * x(\tau)^{-1} * y(\tau)^{-1},$$

où $\tau = \operatorname{sgn} t \cdot \sqrt{|t|}$.

Problème 2. Démontrer que la courbe $z(t)$ appartient à la classe $C^1(\mathbf{R}, G)$ et possède donc un vecteur tangent $z'(t)$. Posons

$$[x'(0), y'(0)] = z'(0), \tag{4}$$

où $x'(0)$, $y'(0)$ sont les vecteurs tangents aux courbes $x(t)$ et $y(t)$ respectivement. Par rapport à l'opération (4) l'espace $\mathfrak{g}$ devient une algèbre de Lie.

Indication. Utiliser le développement (1) et la formule

$$x^{-1} = -x + B(x, x) + \ldots \tag{5}$$

qui s'en déduit, les points de suspension désignant des termes d'ordre $\geqslant 3$. Démontrer que si $x(t) = ta + o(t)$, $y(t) = tb + o(t)$, alors $z(t) = tB(a, b) - tB(b, a) + o(t)$ (d'où l'on voit que l'algèbre de Lie, obtenue par cette méthode, est isomorphe à celle construite plus haut).

La *troisième méthode* consiste également à introduire une structure d'algèbre de Lie dans l'espace $\mathfrak{g}$. Elle est basée sur la représentation dite *adjointe du groupe G* dans l'espace $\mathfrak{g}$.

Désignons par $A(g)$ le difféomorphisme de G donné par la formule

$$A(g): h \mapsto ghg^{-1}, \quad h, g \in G. \tag{6}$$

Il est évident que $A(g)$ est un automorphisme du groupe G (rappelons que les automorphismes de ce type s'appellent intérieurs). Le point e est un point immobile pour tous les automorphismes de $A(g)$.

Considérons l'application dérivée $A(g)_*(e)$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, que l'on note généralement $\operatorname{Ad} g$. D'après la règle de la chaîne (voir 5.2), l'application $g \mapsto \operatorname{Ad} g$ est un homomorphisme de G dans le groupe $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ des transformations linéaires inversibles de l'espace $\mathfrak{g}$. Cet homomorphisme s'appelle *représentation adjointe*. Vu que la représentation adjointe est une application différentiable de G dans $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, on peut donc considérer l'application dérivée $\operatorname{Ad}_* e: \mathfrak{g} \to \operatorname{End} \mathfrak{g}$. (Il est évident que $\operatorname{End} \mathfrak{g}$ est l'espace tangent à $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, puisque $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ est un ensemble ouvert dans l'espace vectoriel $\operatorname{End} \mathfrak{g}$.)

L'application $\operatorname{Ad}_*(e)$ est notée ad et fait correspondre à chaque élément $X \in \mathfrak{g}$ une application linéaire $\operatorname{ad} X$ de l'espace $\mathfrak{g}$. Posons

$$[X, Y] = \operatorname{ad} XY. \tag{7}$$

Problème 3. Démontrer que l'opération définie par la formule (7) transforme $\mathfrak{g}$ en une algèbre de Lie et que cette algèbre coïncide avec celle construite par la méthode précédente.

Indication. Considérer l'application $\alpha: G \times G \to G$ donnée par la formule $\alpha(x, y) = xyx^{-1}$. L'application dérivée $\alpha_*(e, e): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ coïncide avec le commutateur défini par la formule (7). L'affirmation du problème découle maintenant de la forme explicite du développement en série de Taylor (aux termes du deuxième ordre) de la fonction α. Cette forme explicite s'obtient facilement à partir de la formule (1). (Cf. également le problème 11 de 5.2.)

Exemple 1. Soit $G = GL(n, \mathbf{R})$ le groupe de toutes les matrices réelles non dégénérées d'ordre n. L'espace $\mathfrak{g}$ dans ce cas coïncide avec l'espace $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ de toutes les matrices réelles d'ordre n (à la matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ correspond la classe de courbes équivalentes de la forme $x(t) = 1_n + tA + o(t)$). La représentation adjointe est de la forme

$$\mathrm{Ad}\, x : A \mapsto xAx^{-1}, \quad x \in G, \quad A \in \mathfrak{g}. \tag{8}$$

Pour calculer l'opérateur ad posons $x(t) = 1_n + tB$. Alors

$$x(t)\, Ax(t)^{-1} = (1_n + tB)\, A\, (1_n - tB + o(t)) = A + t(BA - AB) + o(t),$$

d'où l'on a $\mathrm{ad}\, BA = BA - AB$, ou

$$[B, A] = BA - AB. \tag{9}$$

La quatrième méthode consiste à construire une algèbre de Lie à l'aide des opérateurs différentiels sur le groupe. Rappelons que l'espace $\mathrm{Vect}\, G$ des champs de vecteurs différentiables sur le groupe de Lie G est une algèbre de Lie de dimension infinie (voir le problème 4 et son corollaire dans 6.2). Notons $\mathfrak{g}_L$ le sous-espace de $\mathrm{Vect}\, G$ composé de tous les champs de vecteurs invariants par rapport à la famille des translations à gauche sur G.

Problème 5. Démontrer que $\mathfrak{g}_L$ est une sous-algèbre de $\mathrm{Vect}\, G$ isomorphe aux algèbres de Lie construites plus haut.

Indication. Démontrer que le champ de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}\, G$ est invariant à gauche si et seulement si pour tous les $g \in G$ on a l'égalité $L(g)\, X = XL(g)$, où $L(g)$ désigne l'opérateur de $C^\infty(G)$, qui agit suivant la formule $[L(g) f](h) = f(g^{-1}h)$.

Pour démontrer la deuxième affirmation du problème, vérifier que l'application qui fait correspondre à chaque champ de vecteurs sa valeur au point e est un isomorphisme du sous-espace $\mathfrak{g}_L \subset \mathrm{Vect}\, G$ sur $\mathfrak{g} = T_eG$. Le fait que cette application est un isomorphisme d'algèbres de Lie peut se déduire de l'affirmation suivante, d'un intérêt particulier.

Problème 6. Démontrer que chaque champ de vecteurs invariant à gauche sur G est pour une certaine famille de translations à droite sur G un champ de vecteurs dérivé (voir 5.2).

Ainsi, nous avons fait correspondre à chaque groupe de Lie G une algèbre de Lie bien déterminée $\mathfrak{g}$. Montrons qu'à chaque homomorphisme différentiable $\varphi: G_1 \to G_2$ d'un groupe de Lie dans un autre correspond un homomorphisme des algèbres de Lie correspondantes. En effet, pour l'application de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$, on peut prendre l'application dérivée $\varphi_*(e)$.

8—0361

De la deuxième méthode de construction de l'algèbre de Lie à partir d'un groupe de Lie on déduit immédiatement que $\varphi_*(e)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Plus brièvement, le résultat obtenu peut s'exprimer comme suit: on a construit un foncteur de la catégorie des groupes de Lie dans celle des algèbres de Lie.

Remarquons que pour construire l'algèbre de Lie à partir d'un groupe de Lie, il suffit de connaître la loi de multiplication dans un voisinage de l'unité aussi petit que l'on veut. Ceci suggère l'idée d'introduire une nouvelle notion.

On appelle *groupe de Lie local* le couple (V, ψ), où V est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant l'origine des coordonnées et ψ une application différenciable de $V \times V$ dans $\mathbf{R}^n$ qui satisfait aux conditions:

1) $$\psi(x, \psi(y, z)) = \psi(\psi(x, y), z),$$

2) $$\psi(0, x) = \psi(x, 0) = x,$$

3) il existe une application différenciable $\varepsilon: V \to \mathbf{R}^n$ telle que $\psi(x, \varepsilon(x)) = \psi(\varepsilon(x), x) = 0$. (Toutes les égalités sont supposées satisfaites sur les ensembles où sont définies toutes expressions faisant partie de ces égalités.)

Chaque groupe de Lie G admet une infinité de groupes de Lie locaux que l'on peut construire de manière suivante. Soit (U, α) une carte de G ayant l'unité pour origine des coordonnées. Choisissons un voisinage de l'unité $V \subset U$, tel que l'on ait les inclusions $V \cdot V \subset U$ et $V^{-1} \subset U$. (Ici, comme d'habitude, $V \cdot V$ désigne l'ensemble de tous les produits xy, $x \in V$, $y \in V$ et V^{-1} l'ensemble de tous les éléments de la forme x^{-1}, $x \in V$.) L'existence d'un tel voisinage découle de la continuité des applications $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$.

Identifiant V avec le domaine $\alpha(V) \subset \mathbf{R}^n$ à l'aide de l'application α et posant $\psi(x, y) = xy$, $\varepsilon(x) = x^{-1}$, on obtient évidemment un groupe de Lie local.

Deux groupes de Lie locaux (V_1, ψ_1) et (V_2, ψ_2) s'appellent *isomorphes*, s'il existe des voisinages de zéro $V_1' \subset V_1$ et $V_2' \subset V_2$ et un difféomorphisme $\alpha: V_1' \to V_2'$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_1' \times V_1' & \xrightarrow{\psi_1} & \mathbf{R}^n \supset V_1' \\ {\scriptstyle \alpha\times\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ V_2' \times V_2' & \xrightarrow{\psi_2} & \mathbf{R}^n \supset V_2' \end{array}$$

est commutatif (c'est-à-dire que $\alpha(\psi_1(x, y)) = \psi_2(\alpha(x), \alpha(y))$ partout où les deux membres de l'égalité sont définis).

Il est clair que tous les groupes locaux obtenus à partir d'un même groupe de Lie G de la manière décrite sont isomorphes entre eux.

Il peut néanmoins arriver que des groupes locaux construits à partir de deux groupes de Lie G_1 et G_2 sont isomorphes tandis que les groupes eux-mêmes ne le sont pas. On dit alors que les groupes G_1 et G_2 sont *localement isomorphes.*

E x e m p l e 2. Supposons $G_1 = \mathbf{R}$, $G_2 = \mathbf{T}$. Pour $V_1 \subset G_1$ prenons l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et pour $V_2 \subset G_2$ le complément au point $-1 \in \mathbf{T}$. L'application $\alpha(x) = e^{ix}$ établit un difféomorphisme entre V_1 et V_2 permutable à la multiplication. Par conséquent, G_1 et G_2 sont localement isomorphes.

T h é o r è m e 1. *Chaque algèbre de Lie est une algèbre de Lie d'un certain groupe local de Lie. Les groupes de Lie locaux sont isomorphes si et seulement si les algèbres de Lie correspondantes le sont aussi.*

La démonstration de ce théorème sera donnée dans la suite.

Pour décrire la liaison entre les groupes de Lie et les groupes de Lie locaux, nous aurons besoin du fait suivant.

T h é o r è m e d e m o n o d r o m i e. *Soient G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, H un groupe de Lie quelconque. Chaque homomorphisme local de G dans H (c'est-à-dire chaque homomorphisme des groupes locaux correspondants) se prolonge d'une façon unique en un homomorphisme global de G dans H.*

En outre, nous aurons souvent recours au théorème bien connu de E. Cartan : *chaque algèbre de Lie est une algèbre de Lie d'un certain groupe de Lie.*

T h é o r è m e 2. *A chaque algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspond un seul groupe de Lie G connexe et simplement connexe, pour lequel $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie. Tous les groupes de Lie connexes possédant cette propriété sont de la forme G/D, où D est un sous-groupe invariant discret inclus dans le centre du groupe G.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit G_0 un groupe de Lie à algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (un tel groupe existe d'après le théorème de E. Cartan). Nous supposerons G_0 connexe, sinon nous pourrions considérer au lieu de G_0 la composante connexe de l'unité sans modifier aucunement l'algèbre de Lie (et même le groupe local correspondant).

Désignons par G le revêtement universel du groupe G_0 (voir **6.1**).

La projection $p: G \to G_0$ est un homomorphisme de groupes de Lie et $D = p^{-1}(e)$ est un sous-groupe invariant discret de G.

D'après le résultat du problème 1 de **2.6**, D appartient au centre du groupe G.

Chaque groupe de Lie G_0, ayant $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie, peut donc être mis sous la forme G/D, où G est un groupe de Lie simplement connexe avec la même algèbre de Lie. Si G_1 et G_2 sont deux groupes de Lie simplement connexes avec une même algèbre de Lie, alors, d'après le théorème 1, ils sont localement isomorphes. En vertu du théorème de monodromie, l'isomorphisme local α se prolonge à un homomorphisme global $\alpha_1: G_1 \to G_2$ et l'application inverse α^{-1} à un homomorphisme global $\alpha_2: G_2 \to G_1$. Les applications $\alpha_1\alpha_2$

et $\alpha_2\alpha_1$ coïncident dans un voisinage de l'unité avec l'application identique. Puisque G_1 et G_2 sont connexes, ces applications sont partout identiques. Par conséquent, G_1 et G_2 sont isomorphes. Le théorème est démontré.

Problème 6. Démontrer que les groupes G/D_1 et G/D_2, où G est un groupe de Lie simplement connexe, et D_1 et D_2 sont des sous-groupes invariants descrets, sont isomorphes si et seulement s'il existe un automorphisme du groupe G qui envoie D_1 dans D_2.

Indication. Recourir au théorème de monodromie.

Pour énumérer tous les groupes connexes de Lie de dimension $\leqslant 3$ faisons appel aux résultats obtenus. Les algèbres de Lie correspondantes ont été décrites dans **6.2.** Citons les groupes simplement connexes correspondants:

I. $\dim G = 1$, $G = \mathbf{R}$.

II. $\dim G = 2$

a) $G = \mathbf{R}^2$ avec l'opération d'addition;

b) G est le groupe des transformations affines de la droite ne modifiant pas l'orientation (pour les coordonnées a, b de l'exemple 5 de **6.1** ce groupe est défini par la condition $a > 0$).

III. $\dim G = 3$

a) $\dim [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, $G = \mathbf{R}^3$ avec l'opération d'addition;

b) $\dim [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 1$, $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \{0\}$, G est le groupe de Lie des matrices triangulaires de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbf{R};$$

c) $\dim [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \dim [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 1$, G est le produit de $\mathbf{R}$ par le groupe de l'exemple II b);

d) $\dim [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 2$.

Soit A une matrice non dégénérée définissant l'algèbre $\mathfrak{g}$ en vertu du problème 6 de **6.2.**

Posons $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. Pour G on peut prendre l'espace $\mathbf{R}^3$ avec la loi de multiplication

$$(x, y, z)(x', y', z') =$$
$$= (x + a(z)x' + b(z)y',\ y + c(z)x' + d(z)y',\ z + z').$$

e) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g} = \mathbf{R}^3$ ayant le produit vectoriel pour commutateur, G est le groupe $SU(2)$ des matrices unitaires d'ordre deux à déterminant égal à l'unité [isomorphe au groupe des quaternions de norme 1 (voir l'exemple 6 de **6.1**)];

f) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est l'algèbre des matrices réelles de trace nulle, G est le revêtement universel du groupe $SL(2, \mathbf{R})$ des matrices réelles d'ordre deux, à déterminant égal à l'unité. (On peut démontrer que ce groupe ne peut pas être mis sous la forme de sous-groupe de $GL(n, \mathbf{C})$ pour aucun n fini.)

Il nous reste à énumérer tous les sous-groupes invariants discrets des groupes cités, à équivalence (dans le sens du problème 6) près. Il est alors utile de se rappeler que ces sous-groupes invariants appartiennent au centre du groupe.

Problème 7. Démontrer que les centres des groupes cités plus haut sont de la forme suivante:

I. $Z(G) = G$.

II. a) $Z(G) = G$,

b) $Z(G) = \{e\}$.

III. a) $Z(G) = G$,

b) $Z(G) = \left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}$, $z \in \mathbf{R}$,

c) $Z(G) = \mathbf{R} \times \{e\}$,

d) $Z(G) = \begin{cases} \{e\}, \text{ si } A \nsim \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}^*, \\ \left\{ \left(0, 0, \frac{2\pi n}{a}\right) \right\}, n \in \mathbf{Z}, \text{ si } A \sim \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}^*, \end{cases}$

e) $Z(G) = \{1, -1\}$,

f) $Z(G) = p^{-1}(\{1, -1\})$, où $p: G \to SL(2, \mathbf{R})$ est la projection naturelle.

Nous laissons au lecteur le soin de terminer la classification des groupes de Lie de dimension $\leqslant 3$. En particulier, il obtiendra alors une démonstration fort simple du théorème 1 de **6.1** sur la classification des groupes de Lie de dimension 1 (en supposant a priori que les groupes soient différentiable).

Pour la démonstration des théorèmes cités ci-dessus voir les livres [46], [10].

6.4. Application exponentielle. Un rôle important dans l'étude des groupes de Lie revient aux *sous-groupes à un paramètre*, c'est-à-dire aux sous-groupes qui sont des groupes de Lie de dimension un. Le paramètre t peut être choisi de sorte à avoir les égalités

$$x(0) = e, \quad x(t)\, x(s) = x(t + s). \tag{1}$$

Vu que $x(t)$ est une courbe différentiable, un vecteur tangent est défini

$$X = x'(0) \in \mathfrak{g}. \tag{2}$$

Théorème 1. *Pour chaque vecteur $X \in \mathfrak{g}$ il existe une seule courbe différentiable $x(t)$ qui satisfait aux conditions* (1) *et* (2).

Convenons d'adopter les notations suivantes. Si ξ est un vecteur tangent au groupe G au point g_0, $g\xi$ (respectivement ξg) représente le vecteur tangent à G au point gg_0 (respectivement au point $g_0 g$) qui s'obtient à partir de ξ par l'application $L(g)_*(g_0)$ (respectivement $R(g)_*(g_0)$), où $L(g)$ (respectivement $R(g)$) est une translation par l'élément g à gauche (respectivement à droite).

Problème 1. Démontrer l'identité

$$g\xi g^{-1} = \mathrm{Ad}\, g\xi, \quad g \in G, \quad \xi \in \mathfrak{g}. \tag{3}$$

Indication. Voir dans **6.2** la troisième méthode de construction de l'algèbre de Lie correspondant au groupe de Lie.

Problème 2. Démontrer que (1) entraîne l'identité:

$$x(t)\, x'(0) = x'(t), \quad x'(0)\, x(t) = x'(t). \tag{4}$$

Indication. Mettre les conditions du problème sous la forme

$$L(x(t))\, x(s) = x(t+s) \text{ ou } R(x(t))\, x(s) = x(s+t).$$

Soit maintenant X un élément fixe de $\mathfrak{g}$. Considérons les champs de vecteurs sur G donnés par la formule

$$\xi_X(g) = gX, \quad \eta_X(g) = Xg.$$

Problème 3. Démontrer qu'un champ de vecteurs sur G est invariant à gauche (respectivement invariant à droite), si et seulement s'il est de la forme $\xi_X(g)$ (respectivement $\eta_X(g)$) pour un certain $X \in \mathfrak{g}$.

Indication. Écrire la condition d'invariance à gauche (à droite) du champ $\xi(g)$ ($\eta(g)$) sous la forme

$$g\xi(h) = \xi(gh), \quad \eta(h)\, g = \eta(hg)$$

et démontrer les identités

$$g_1(g_2\xi) = (g_1 g_2)\,\xi, \quad (\eta g_1)\, g_2 = \eta(g_1 g_2).$$

Il est maintenant aisé de démontrer le théorème 1. De l'égalité (4) il découle que la courbe $x(t)$, qui satisfait aux conditions (1) et (2), est tangente en chacun de ses points au champ de vecteurs $\xi_X(g)$ (ainsi qu'au champ $\eta_X(g)$, vu que ces champs coïncident sur la courbe $x(t)$, cf. le problème 1). L'existence d'un groupe local de dimension un avec vecteur tangent X découle maintenant du théorème sur l'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles (voir **5.2**).

Problème 4. Montrer que chaque groupe local de dimension un dans le groupe de Lie G se prolonge à un sous-groupe de Lie.

Indication. Supposons $x(t)$ définie pour $|t| < a$ et satisfaisant à la condition (1) pour $|t| + |s| < a$.

Posons $t \in \mathbf{R}\; x(t) = x(t/N)^N$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, où le nombre N est choisi si grand que $|t/N| < a$. Démontrer que $x(t)$ ne dépend pas en fait du choix de N et que (1) est satisfait pour tous les t et s.

Soit maintenant G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Définissons l'*application exponentielle* exp: $\mathfrak{g} \to G$ de la manière suivante :

$$\exp X = x(1), \tag{5}$$

où $x(t)$ est le groupe à un paramètre qui correspond au vecteur X d'après le théorème 1. (Cette application est également appelée *canonique*.)

Une des propriétés principales de l'application exponentielle est le fait qu'elle est fonctorielle, ce qui s'exprime par la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\varphi_*(e)} & \mathfrak{g}_2 \end{array}$$

La démonstration de ce fait découle immédiatement de la définition de l'application exponentielle.

Corollaire 1. *Les représentations de dimension finie d'un groupe de Lie local correspondent d'une manière unique aux représentations de leurs algèbres de Lie.*

Corollaire 2. *Pour chaque groupe de Lie connexe et simplement connexe les représentations de dimension finie correspondent bijectivement aux représentations de l'algèbre de Lie.*

(Ceci découle du théorème de monodromie, voir **6.3**.)

Considérons en détail le cas où $G = GL(n, \mathbf{R})$ est le groupe des matrices réelles non dégénérées d'ordre n. L'algèbre $\mathfrak{g}$ coïncide dans ce cas avec l'espace $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ (voir exemple 1 de **6.3**).

Problème 5. Démontrer que l'équation différentielle

$$x'(t) = Xx(t)$$

à condition initiale $x(0) = 1$ a pour solution la fonction

$$x(t) = e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}. \tag{6}$$

Indication. Comparer avec **4.2.**

Corollaire. *L'application exponentielle pour les groupes matriciels est de la forme*

$$\exp X = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Problème 6. Démontrer les égalités

1) $$\exp\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\dots 0\\ 0 & \lambda & 1\dots 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\\ 0 & 0 & 0\dots\lambda\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} e^{\lambda} & e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{2!} & \dots & \frac{e^{\lambda}}{n!}\\ 0 & e^{\lambda} & e^{\lambda} & \dots & \frac{e^{\lambda}}{(n-1)!}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda}\end{Vmatrix},$$

2) $$\exp\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=e^{\frac{a+d}{2}}\left[\operatorname{ch}\rho\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{\operatorname{sh}\rho}{\rho}\begin{pmatrix}\frac{a-d}{2} & b\\ c & \frac{d-a}{2}\end{pmatrix}\right],$$

où

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2+bc},$$

3) $$\exp\begin{pmatrix}0 & a & c\\ -a & 0 & b\\ -c & -b & 0\end{pmatrix}=\cos r\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{\sin r}{r}\begin{pmatrix}0 & a & c\\ -a & 0 & b\\ -c & -b & 0\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1-\cos r}{r}\begin{pmatrix}b^2 & -bc & ab\\ -bc & c^2 & -ac\\ ab & -ac & a^2\end{pmatrix},$$

où $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

En vertu de la théorie générale des équations différentielles (théorème sur la dépendance de la solution des conditions initiales et des coefficients du système) exp est une application différentiable. Montrons que l'application $\exp_*(0): \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ est identique.

En effet, les sous-groupes à un paramètre correspondant aux vecteurs X et tX sont évidemment liés par l'égalité

$$x_{tX}(s)=x_X(ts).$$

Donc, $\exp tX = x_{tX}(1) = x_X(t)$, c'est-à-dire que l'application exp envoie la courbe $\{tX\}\subset\mathfrak{g}$ dans la courbe $x_X(t)\subset G$. En passant à l'application dérivée, nous obtenons

$$\exp_*(0): X\mapsto X,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. *Dans un certain voisinage U du point d'origine $X=0$, l'application* exp *est un difféomorphisme.*

Nous allons désigner par ln l'application $\exp^{-1}$ qui n'est définie, en général, que dans un certain voisinage de l'unité du groupe. Le système de coordonnées locale ($\exp U$, ln) s'appelle *canonique.*

Un groupe de Lie G s'appelle *exponentiel*, si le système de coordonnées canoniques recouvre tout le groupe G. La classe des groupes

exponentiaux contenant tous les groupes nilpotents connexes et simplement connexes fait partie de la classe des groupes résolubles.

P r o b l è m e 7. Montrer que la loi de multiplication dans les coordonnées canoniques est de la forme

$$\varphi(x, y)=x+y+\frac{1}{2}[x, y]+\ldots, \tag{7}$$

où les points de suspension désignent des termes d'ordre $\geqslant 3$.

I n d i c a t i o n. Recourir à la formule (5) de 6.3 et au fait que $(\exp X)^{-1}=$ $=\exp(-X)$.

La formule (7) montre que la loi de multiplication du groupe, jusqu'aux termes d'ordre deux, peut être retrouvée à partir de la loi de commutation dans l'algèbre de Lie. Or, il se trouve que tous les autres termes du développement de $\psi(x, y)$ en série de Taylor peuvent être exprimés à l'aide de l'opération de commutation. Nous n'énoncerons ici que la réponse définitive. Pour la démonstration voir les livres [35] et [54].

T h é o r è m e 2 (f o r m u l e d e C a m p b e l l - H a u s d o r f - D y n k i n e). *La loi de multiplication dans les coordonnées canoniques est de la forme*

$$\psi(x, y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{\substack{k_i+l_i\geqslant 1\\ k_i\geqslant 0,\ l_i\geqslant 0}}\frac{[x^{k_1}y^{l_1}\ldots x^{k_m}y^{l_m}]}{k_1!\,l_1!\ldots k_m!\,l_m!}, \tag{8}$$

où le symbole $[x_1x_2\ldots x_n]$ *signifie* $\frac{1}{n}[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_n]$.

R e m a r q u e 1. La formule (8) s'obtient de la série formelle pour la fonction $\ln(e^xe^y)$ des variables non commutatives x, y, si l'on remplace chaque monôme D par l'expression $[D]$.

R e m a r q u e 2. Contenant un grand nombre de termes semblables non regroupés, la série (8) s'avère donc peu pratique pour les calculs.

Sans avoir de valeur pratique, cette série joue néanmoins un rôle important dans la théorie, car elle démontre le théorème 1 de 6.3.

Dans de nombreuses questions de la théorie des groupes de Lie, il importe de connaître non pas la fonction $\psi(x, y)$ elle-même, mais seulement sa dérivée partielle pour une des variables à l'origine des coordonnées. On peut indiquer la forme explicite suivante de cette dérivée:

T h é o r è m e 3. *Posons* $L_x(y)=R_y(x)=\psi(x, y)$. *Alors*

$$(L_{\exp X})_*(0)=b(-\operatorname{ad} X),\quad (R_{\exp X})_*(0)=b(\operatorname{ad} X), \tag{9}$$

où $b(z)=\frac{z}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k$ (B_k sont ici les nombres de Bernoulli).

L'énoncé du problème se déduit facilement de la formule suivante d'un intérêt particulier.

P r o b l è m e 8. Démontrer l'égalité

$$\exp(X + tY)\exp(-X) = \exp(t\alpha(\mathrm{ad}\,X)\,Y + o(t)), \tag{10}$$

où

$$\alpha(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}.$$

I n d i c a t i o n. En vertu du théorème d'Ado (voir 6.2), il suffit de considérer le cas d'une algèbre matricielle.

C o r o l l a i r e 1. *L'application* exp *est un homéomorphisme dans un voisinage du point X si et seulement si les valeurs propres de l'opérateur* ad X *diffèrent de* $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$, $\pm 6\pi i$, . . .

C o r o l l a i r e 2. *Une mesure sur le groupe G invariante à gauche* (respectivement *à droite*) *prend en coordonnées canoniques la forme*

$$\rho_l(X)\,dX \text{ (respectivement } \rho_r(X)\,dX),$$

où dX est la mesure euclidienne usuelle dans $\mathfrak{g}$, et les fonctions ρ_l et ρ_r sont données par les formules

$$\rho_l(X) = \det[\alpha(-\mathrm{ad}\,X)], \quad \rho_r(X) = \det[\alpha(\mathrm{ad}\,X)] \tag{11}$$

(la fonction α étant la même que dans le problème 8).

C o r o l l a i r e 3. *Pour qu'il existe une mesure invariante des deux côtés sur le groupe G, il faut et il suffit que l'on ait l'égalité*

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,X = 0 \quad \textit{quel que soit } X \in \mathfrak{g}. \tag{12}$$

En effet, $\rho_r(X)/\rho_l(X) = \det(e^{\mathrm{ad}\,X}) = e^{\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,X}$.

On peut obtenir la formule (10) d'une autre manière, en considérant la fonction

$$\varphi(s, t) = \exp(-sc_t)\frac{\partial}{\partial t}\exp sc_t,$$

où c_t est une certaine courbe dans $\mathfrak{g}$.

P r o b l è m e 9. Démontrer l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, t) = \exp(-sc_t)\left(\frac{d}{dt}c_t\right)\exp(sc_t). \tag{13}$$

Posant ensuite $c_t = X + tY$ et intégrant la relation (13) sur s de 0 à 1, on obtient l'égalité (10).

DEUXIÈME PARTIE

NOTIONS ET MÉTHODES FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

§ 7. REPRÉSENTATION DES GROUPES

7.1. Représentations linéaires. Comme nous l'avons déjà dit, le terme « représentation » signifie, dans le sens large, un homomorphisme T du groupe G dans le groupe des transformations d'un certain ensemble X [1]. La représentation T s'appelle *linéaire*, si X est un espace vectoriel et les transformations $T(g)$ sont les opérateurs linéaires quelconques.

Si X est un G-espace quelconque, l'espace vectoriel $L(X)$ des fonctions sur X se trouve alors muni d'une représentation linéaire T:

$$[T(g)f](x) = \begin{cases} f(xg) & \text{pour un } G\text{-espace à droite,} \\ f(g^{-1}x) & \text{pour un } G\text{-espace à gauche.} \end{cases}$$

Ce fait permet d'utiliser les représentations linéaires pour étudier les représentations dans le cas général.

En guise d'exemple d'une telle application, citons la théorie spectrale des systèmes dynamiques.

Appelons système dynamique général tout espace X muni d'une mesure μ et d'un groupe de transformations G conservant la mesure μ (ou au moins sa classe d'équivalence). Le cas où X est l'espace des phases d'un système mécanique, μ la mesure de Liouville, et G un groupe dynamique définissant l'évolution du système en est l'exemple le plus important. L'objet de la théorie spectrale des systèmes dynamiques est l'étude et la description des différentes propriétés d'un tel système en termes de la représentation unitaire T qui apparaît dans $L^2(X, \mu)$.

Les représentations *projectives* T, pour lesquelles X est un espace projectif et $T(g)$ sont des transformations projectives, forment une

[1]) Une définition plus générale des représentations (comme faisceaux sur une certaine topologie de Grothendieck) a été proposée par A. Geronimus; voir [86].

classe de représentations analogue à celle des représentations linéaires. Vu que l'espace projectif X est un ensemble de droites dans un espace vectoriel L et les représentations projectives de X sont induites par les transformations linéaires de L, nous pouvons considérer toute représentation projective comme une application $T: G \to \mathrm{Aut}\, L$, qui possède la propriété

$$T(g_1 g_2) = c(g_1, g_2)\, T(g_1)\, T(g_2),$$

où c est une certaine fonction numérique sur $G \times G$.

En particulier, chaque représentation linéaire de G dans L induit une représentation projective.

La mécanique quantique constitue un domaine fort important d'application de la théorie des représentations projectives. Comme on le sait, le rôle de l'espace de phases revient en mécanique quantique à l'espace projectif $P(H)$, composé de droites complexes dans l'espace hilbertien complexe de dimension infinie. Les transformations admissibles de $P(H)$ sont les transformations projectives correspondant aux opérateurs unitaires et antiunitaires dans H.

Dans ce qui suit, nous considérerons, en général, seules les représentations linéaires que pour plus de simplicité nous appellerons représentations tout court.

L'ensemble des représentations du groupe G dans un espace vectoriel sur un corps K non nécessairement commutatif forme une catégorie $\Pi(G, K)$. Les morphismes de cette catégorie sont les *opérateurs d'entrelacement*, c'est-à-dire les opérateurs permutables à l'action du groupe. Les objets isomorphes de $\Pi(G, K)$ s'appellent *représentations équivalentes*.

L'ensemble des opérateurs d'entrelacement pour les représentations T_1 et T_2 agissant dans les espaces V_1 et V_2 est désigné par $\mathscr{C}(T_1, T_2)$ ou $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. Au lieu de $\mathscr{C}(T, T) = \mathrm{Hom}_G(V, V)$ nous écrirons $\mathscr{C}(T)$ ou $\mathrm{End}_G\, V$. La dimension de l'espace $\mathscr{C}(T_1, T_2)$ est désignée par $c(T_1, T_2)$ et appelée *nombre d'entrelacement*. Si $c(T_1, T_2) = c(T_2, T_1) = 0$ les représentations T_1 et T_2 s'appellent *disjointes*.

E x e m p l e. Supposons $G = \mathbf{R}$; la représentation T_∞ agit dans l'espace P_∞ de tous les polynômes en x suivant la formule

$$[T(t) f](x) = f(x + t),$$

tandis que la représentation T_k est donnée par cette même formule dans l'espace P_k des polynômes dont le degré ne dépasse pas k, $k = 0, 1, 2, \ldots$

P r o b l è m e 1. Démontrer que $c(T_\infty, T_k) = 0$, $c(T_k, T_\infty) = k + 1$.

I n d i c a t i o n. $\mathscr{C}(T_k, T_\infty)$ est engendré par les opérateurs $1, d/dx, \ldots$ $\ldots, d^k/dx^k$.

P r o b l è m e 2. Si les représentations T et S sont de dimension finie, alors $c(T, S) = c(S, T)$.

I n d i c a t i o n. Faire appel au fait que, pour une matrice de dimension finie, le rang pour les colonnes coïncide avec le rang pour les lignes.

Soit T la représentation du groupe G dans l'espace V. La correspondance $g \mapsto T(g^{-1})^*$, où $*$ désigne le passage à l'opérateur adjoint dans l'espace dual V^*, est une représentation de G dans V^*. Cette représentation s'appelle *adjointe* ou *contragradiente* à la représentation T. Nous la noterons T^*.

Pour éviter une confusion que peut provoquer cette notation, remarquons que l'opérateur $T^*(g)$, d'après la définition de T^*, est égal à $T(g^{-1})^*$ et non pas à $T(g)^*$.

Si, dans l'espace V de la représentation T, il existe un sous-espace V_1, invariant par rapport à tous les opérateurs $T(g)$, $g \in G$, on dit que la représentation T est *réductible*. La restriction de $T(g)$ sur V_1 définit une représentation T_1 du groupe G dans l'espace V_1. Elle s'appelle *sous-représentation* de T. Dans l'espace quotient $V_2 = V/V_1$ une représentation de G appelée *représentation quotient* de T est naturellement induite.

Si le sous-espace invariant $V_1 \subset V$ possède un espace supplémentaire invariant (qui s'identifie naturellement à V_2) la représentation T s'appelle *décomposable* et s'écrit $T = T_1 + T_2$.

P r o b l è m e 3. Démontrer que la représentation $T_1 + T_2$ est la somme de T_1 et T_2 dans la catégorie $\Pi(G, K)$.

Toute représentation T sans sous-représentations non triviales s'appelle *algébriquement irréductible*.

A titre d'exemple de représentation réductible, mais non décomposable, citons la représentation T_k ci-dessus du groupe $\mathbf{R}$ dans l'espace P_k pour $k > 0$.

Les représentations pour lesquelles chaque sous-espace invariant possède un supplémentaire invariant s'appellent *complètement réductibles*.

Dans la catégorie $\Pi(G, K)$ l'opération de *produit tensoriel* est définie. Si T_i est une représentation dans l'espace vectoriel V_i sur K, $i = 1, 2$, alors la représentation $T_1 \otimes T_2$ agit sur $V_1 \underset{K}{\otimes} V_2$ suivant la formule

$$(T_1 \otimes T_2)(g) : \xi_1 \otimes \xi_2 \mapsto T_1(g)\,\xi_1 \otimes T_2(g)\,\xi_2.$$

P r o b l è m e 4. Démontrer que les opérations de somme et de produit tensoriel sont compatibles avec la relation d'équivalence et, par conséquent, sont bien définies sur l'ensemble des classes de représentations équivalentes.

P r o b l è m e 5. Démontrer les égalités

$$c(T_1 + T_2, T_3) = c(T_1, T_3) + c(T_2, T_3),$$

$$c(T_1, T_2 + T_3) = c(T_1, T_2) + c(T_1, T_3),$$

$$c(T_1 \otimes T_2, T_3) = c(T_1, T_2^* \otimes T_3), \text{ si } \dim T_2 < \infty.$$

Indication. L'espace $\mathscr{C}(T_1, T_2)$ peut être interprété comme sous-espace des éléments G-invariants dans l'espace Hom (V_1, V_2), sur lequel G agit suivant la formule

$$g : A \mapsto T_2(g) A T_1(g)^{-1}.$$

Pour toute sous-catégorie $\Pi' \subset \Pi(G, K)$ fermée par rapport à l'opération de somme de représentations, on peut définir le *groupe de Grothendieck* $\Gamma(\Pi')$.

Par définition, $\Gamma(\Pi')$ est le groupe abélien engendré par les classes d'équivalence $[T]$ des représentations T de Ob Π' avec les relations suivantes:

$[T] = [T_1] + [T_2]$, si T_1 est une sous-représentation de T, et T_2 la représentation quotient correspondante.

Si la catégorie Π' est fermée par rapport au produit tensoriel, $\Gamma(\Pi')$ sera un anneau commutatif par rapport à l'opération

$$[T_1] \cdot [T_2] = [T_1 \otimes T_2].$$

Si Π' est fermée par rapport à l'opération de la puissance k extérieure, $k = 2, 3, \ldots$, alors on peut introduire sur $\Gamma(\Pi')$ une structure de λ-*anneau*. Cette structure est définie par l'homomorphisme λ_t du groupe additif de l'anneau dans le groupe multiplicatif des séries de la forme $1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$, où les a_k sont des éléments de l'anneau. Pour le cas d'un anneau de Grothendieck, l'homomorphisme λ_t est de la forme

$$\lambda_t([T]) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [\wedge^k T] t^k.$$

L'application $G \mapsto \Gamma(\Pi(G, K))$ est un foncteur contravariant de la catégorie des groupes dans celle des λ-anneaux. Pour plus de détails sur ce foncteur et ses applications voir le livre de L. Husemöller [32].

Si K est un sous-corps de L, les foncteurs naturels de $\Pi(G, K)$ dans $\Pi(G, L)$ et inversement, appelés *substitutions des scalaires*, sont alors définis. Le premier foncteur consiste à passer de l'espace V sur K à l'espace $V_L = V \underset{K}{\otimes} L$ sur L. Le deuxième signifie que l'espace V sur L est considéré comme un espace sur K; dans ce cas, on le note V_K. L'exemple le plus important est obtenu lorsque $K = \mathbf{R}$, $L = \mathbf{C}$. Les foncteurs correspondants s'appellent en général *complexification* et *réalisation*.

7.2. Représentation des groupes topologiques dans les espaces topologiques vectoriels. Dans le cas où G est un groupe topologique et V un espace topologique vectoriel, nous supposerons en général, sans l'expliciter, que la représentation considérée T est continue, c'est-à-dire que l'application $(g, \xi) \mapsto T(g)\xi$ est continue comme fonction de deux variables.

Il suffit le plus souvent d'imposer à cette représentation une restriction plus faible, à savoir : seule la continuité séparée (qui signifie que l'homomorphisme T du groupe G dans le groupe Aut V, muni de la topologie opératoire forte, est continue).

Problème 1. Si G est localement compact et V un espace de Banach, la continuité séparée de la représentation T équivaut à sa continuité.
Indication. Utiliser le théorème de Banach-Steinhaus de **4.1**.

Le terme « opérateur d'entrelacement » pour les représentations continues des groupes topologiques signifiera toujours « opérateur d'entrelacement continu » et le nombre d'entrelacement, la dimension de l'espace de ces opérateurs.

Les représentations continues du groupe topologique G dans tous les espaces topologiques sur le corps K forment une catégorie : $RT\,(G, K)$.

Si un sous-espace fermé V_1, invariant par rapport à tous les opérateurs $T(g)$, est inclus dans l'espace V de la représentation T, alors la restriction T_1 de la représentation T sur V_1 s'appelle *sous-représentation* (*topologique*) de T, et la représentation T_2, qui apparaît dans l'espace quotient $V_2 = V/V_1$, *représentation quotient* (*topologique*) *de* T.

La représentation T s'appelle *topologiquement irréductible* si elle ne possède aucune sous-représentation non triviale, et *complètement irréductible* si chaque opérateur est la limite faible d'un certain filet consistant des combinaisons linéaires des opérateurs $T(g)$, $g \in G$.

On dit qu'une représentation T est (*topologiquement*) *décomposable*, s'il existe dans l'espace V des sous-espaces fermés invariants V_1, V_2 tels que V est isomorphe à la somme directe $V_1 \oplus V_2$. On écrit dans ce cas $T = T_1 + T_2$, où T_i est la restriction de T sur V_i.

Problème 2. La représentation $T_1 + T_2$ est la somme de T_1 et T_2 dans la catégorie $RT\,(G, K)$.

L'opération de produit tensoriel ne peut être définie de façon raisonnable que dans des sous-catégories particulières de $RT\,(G, K)$. Ainsi, pour les représentations dans des espaces de Banach, il est naturel d'utiliser l'opération $\hat{\otimes}$, et pour les représentations unitaires dans les espaces hilbertiens l'opération du produit hilbertien (voir. **4.1**).

I. Gelfand a proposé la notion suivante de l'*irréductibilité tensorielle* d'une représentation.

Une représentation T du groupe G dans l'espace V est tensoriellement irréductible, si pour chaque représentation triviale S du groupe G dans l'espace nucléaire W chaque sous-espace fermé G-invariant de $V \hat{\otimes} W$ est de la forme $V \hat{\otimes} W_1$, où W_1 est un sous-espace de W.

Les catégories $RT(G, K)$ pour les groupes G non compacts sont très peu étudiées. Par exemple, pour $G = \mathbf{Z}$ et $K = \mathbf{C}$, la classification des représentations équivaut à celle des opérateurs linéaires continus (à similitude près) dans les espaces vectoriels topologiques. Ce problème classique de l'analyse fonctionnelle est loin d'être résolu. On ne sait même pas classifier les représentations topologiquement irréductibles. Le problème de l'existence des représentations irréductibles de dimension infinie formulé il y a une quarantaine d'années par S. Banach n'est pas résolu même aujourd'hui.

Dans le cas de dimension finie le problème de la classification des représentations du groupe $\mathbf{Z}$ s'avère résolu grâce au théorème de réduction d'une matrice à sa forme normale jordanienne. Pour le groupe $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ ce problème nous amène à celui de réduction simultanée à la forme canonique d'un couple de matrices permutables.

Comme l'ont montré I. Gelfand et V. Ponomarev, ce problème contient la classification des familles finies de matrices comme sous-problème (voir la revue *Analyse Fonctionnelle*, 3, 4 (1969), 81-82 (en russe)).

7.3. Représentations unitaires. La représentation T dans l'espace V s'appelle *unitaire*, si V est un espace hilbertien et $T(g)$ un opérateur unitaire quel que soit $g \in G$. Les représentations unitaires forment la classe des représentations la plus importante et le mieux étudiée. La cause en est que: premièrement, les représentations unitaires apparaissent naturellement dans diverses applications (systèmes dynamiques, mécanique quantique, théorie des champs); deuxièmement, tout un nombre de propriétés remarquables de ces représentations rend leur étude bien plus facile. Nous citerons ici quelques-unes de ces propriétés. D'autres seront décrites dans les paragraphes suivants.

Problème 1. Chaque représentation unitaire est complètement réductible.

Indication. Le supplémentaire orthogonal à un sous-espace invariant est invariant.

Nous verrons plus loin que l'étude des représentations unitaires se réduit, dans une grande mesure, à celle des représentations topologiques irréductibles.

L'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles du groupe G est noté $\hat{G}$ et appelé *objet dual* au groupe G. Si le groupe G est commutatif, toutes ses représentations unitaires irréductibles sont de dimension un. Dans ce cas, l'opération de produit tensoriel définit dans $\hat{G}$ une structure de groupe commutatif. La représentation identique en est l'élément unité et la représentation conjuguée complexe l'élément inverse.

Une *topologie* peut être introduite dans l'ensemble $\hat{G}$ de la manière suivante. Soit T une représentation irréductible du groupe G dans l'espace H. A chaque ensemble compact $K \subset G$, à chaque famille finie de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$ et à chaque nombre $\varepsilon > 0$ faisons correspondre un sous-ensemble $U(K, \xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon)$ dans $\hat{G}$. Par définition, il se compose des classes $[S]$ des représentations irréductibles S, dont les espaces contiennent les vecteurs $\eta_1, \ldots, \eta_n$ tels que:

$$|(T(g)\xi_i, \xi_j) - (S(g)\eta_i, \eta_j)| < \varepsilon \quad \text{pour } g \in K, \ 1 \leqslant i, \ j \leqslant n.$$

On prend la famille de tous les sous-ensembles $U(K, \xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon)$ pour base de voisinages du point $[T] \in \hat{G}$.

Il existe une autre méthode pour définir la topologie dans $\hat{G}$. Soit $\tilde{G}$ la famille des classes d'équivalence des représentations unitaires quelconques (non nécessairement irréductibles) du groupe G. Faisons correspondre à chaque sous-ensemble $\mathscr{S} \subset \tilde{G}$ un certain espace $V(\mathscr{S})$ de fonctions sur G. Par définition, $V(\mathscr{S})$ se compose de toutes les fonctions continues bornées sur G que l'on peut uniformément approcher par les éléments matriciaux des représentations des classes $[S] \subset \mathscr{S}$ sur chaque compact. (On appelle élément matriciel d'une représentation S dans l'espace V une fonction de la forme $g \mapsto \langle \eta, S(g)\xi \rangle$, où $\xi \in V$, $\eta \in V'$.) On dit que le sous-ensemble $\mathscr{S}_1$ est faiblement inclus dans $\mathscr{S}_2$, si $V(\mathscr{S}_1) \subset V(\mathscr{S}_2)$, et que $\mathscr{S}_1$ est faiblement équivalent à $\mathscr{S}_2$, si $V(\mathscr{S}_1) = V(\mathscr{S}_2)$.

Théorème 1. *Soient T une représentation unitaire irréductible d'un groupe localement compact G et $[T]$ sa classe d'équivalence. Le point $[T]$ fait alors partie de l'adhérence de l'ensemble $\mathscr{S} \subset \hat{G}$ si et seulement si $[T]$ est faiblement inclus dans $\mathscr{S}$.*

L'une des affirmations du théorème étant bien évidente, nous allons discuter l'autre au § 10.

Les représentations unitaires irréductibles possèdent tout un nombre de propriétés spécifiques, dont l'énoncé s'avère particulièrement aisée en faisant appel à la notion de k-irréductibilité.

Soient L_k un espace hilbertien de dimension k, S_k une représentation triviale du groupe G dans l'espace L_k. Nous dirons que la représentation T du groupe G dans l'espace H est *k-irréductible*, si chaque sous-espace fermé de $H \otimes L_k$, invariant par rapport à $T \otimes S_k$, est de la forme $H \otimes L_k^0$, où L_k^0 est un sous-espace de L_k.

Considérons en plus de détails cette notion pour de différents k.

Il est clair que la 1-irréductibilité coïncide avec l'irréductibilité topologique.

Problème 2. Démontrer que la k-irréductibilité pour un k fini équivaut à la condition suivante: pour des vecteurs linéairement indépendants

$\xi_1, \ldots, \xi_k \in H$ quelconques et des vecteurs quelconques $\eta_1, \ldots, \eta_k \in H$ il existe, quel que soit $\varepsilon > 0$, un opérateur A de la forme $A = \sum_{i=1}^{N} c_i T(g_i)$ tel que

$$\| A\xi_i - \eta_i \| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Indication. Considérer dans $H \otimes L_k \approx H \oplus \ldots \oplus H$ le plus petit sous-espace fermé invariant qui contient le vecteur $(x_1, \ldots, x_k)$.

Corollaire. *Si la représentation T est k-irréductible pour tous les k finis, alors elle est complètement irréductible.*

Problème 3. Démontrer que la ∞-irréductibilité de T est équivalente à la condition : pour un choix quelconque de vecteurs linéairement indépendants $\{\xi_i\}$ vérifiant la condition $\sum_{i=1}^{\infty} \| \xi_i \|^2 < \infty$ et une famille de vecteurs quelconques $\{\eta_i\}$ satisfaisant à la condition $\sum_{i=1}^{\infty} \| \eta_i \|^2 < \infty$, il existe, quel que soit $\varepsilon > 0$, un opérateur A de la forme $\sum_{i=1}^{N} c_i T(g_i) = A$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| A\xi_i - \eta_i \|^2 < \varepsilon.$$

La représentation T s'appelle *opératoirement irréductible*, si chaque opérateur fermé permutable aux opérateurs $T(g)$, $g \in G$ doit être scalaire. (Rappelons que l'opérateur linéaire A défini sur un sous-espace $D(A) \subset H$ s'appelle *fermé*, si son graphique $(\Gamma A) = \{(x, Ax) \in H \oplus H;\ x \in D(A)\}$ est un sous-espace de $H \oplus H$.)

Problème 4. Démontrer que la 2-irréductibilité d'une représentation unitaire T équivaut à son irréductibilité opératoire.

Indication. La permutabilité de A à $T(g)$ est équivalente à l'invariance de $\Gamma(A)$ par rapport à $(T + T)(g) = (T \otimes S_2)(g)$.

Théorème 1. *Pour une représentation unitaire T toutes les propriétés de k-irréductibilité pour $k = 1, 2, \ldots, \infty$ sont équivalentes entre elles et à la condition $\mathscr{C}(T) = \mathbf{C} \cdot 1$.*

Démonstration. Il est clair que la k-irréductibilité implique la l-irréductibilité pour $k \geqslant l$. Notons que la 1-irréductibilité de T implique l'égalité $\mathscr{C}(T) = \mathbf{C} \cdot 1$ qui, à son tour, entraîne la ∞-irréductibilité de T.

Soit T une représentation topologiquement irréductible et $A \subset \mathscr{C}(T)$. Alors $A + A^*$ et $i(A - A^*)$ sont hermitiens et appartiennent également à $\mathscr{C}(T)$. Les décompositions spectrales de ces opérateurs sont invariantes par rapport à la représentation T. Par conséquent, chaque projecteur de ces décompositions est nul ou égal à 1. On peut donc déduire (voir le théorème 2 de 4.5) que les

opérateurs $A + A^*$ et $i(A - A^*)$ sont scalaires. Donc, A l'est aussi.

Supposons maintenant que $\mathscr{C}(T) = \mathbf{C}\cdot 1$. L'espace $H \otimes L_\infty$ s'identifie naturellement avec $H \oplus \ldots \oplus H \oplus \ldots$ (ensemble dénombrable de termes). Soit P_i le projecteur sur le i-ième terme. Chaque opérateur $A \in \mathscr{C}(T \otimes L_\infty)$ peut s'écrire sous la forme d'une matrice infinie $\| A_{ij} \|$, où $A_{ij} = P_i A P_j$. Il est évident que $A_{ij} \in \in \mathscr{C}(T)$ et, par conséquent, $A_{ij} = a_{ij}\cdot 1$, $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Donc, $\mathscr{C}(T \otimes L_\infty) = = 1 \otimes \mathfrak{B}(L_\infty)$.

Si W est un sous-espace invariant de $H \otimes L_\infty$, le projecteur orthogonal sur W se trouve dans $\mathscr{C}(T \otimes L_\infty)$ et, par conséquent, il est de la forme $1 \otimes P$, où P est le projecteur sur L_∞. Donc, $W = = H \otimes PL_\infty$, ce qui démontre la ∞-irréductibilité de T.

Problème 5. Chaque représentation unitaire topologiquement irréductible est tensoriellement irréductible (voir 7.2).

Indication. Soient T une représentation unitaire topologiquement irréductible de G dans un espace hilbertien H, W un espace nucléaire avec action triviale de G et V un sous-espace fermé G-invariant de $H \hat{\otimes} W$. Utiliser le fait que W étant nucléaire, il existe un homomorphisme antilinéaire $\varphi: H \hat{\otimes} W \to \mathrm{Hom}(H, W)$ permutable à l'action de G. Démontrer que $\varphi(V) = = \mathrm{Hom}(H, W_1)$, où W_1 est un sous-espace de W.

§ 8. DÉCOMPOSITION DES REPRÉSENTATIONS

Le problème de la décomposition des représentations du groupe G en composantes aussi simples que possible est l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des représentations.

Les chapitres classiques de l'analyse, de la théorie des fonctions et de la physique mathématique sont des cas particuliers de la théorie générale de la décomposition d'une représentation. Voici des exemples:

la théorie spectrale des opérateurs unitaires (décomposition des représentations unitaires du groupe $\mathbf{Z}$),

la théorie de la réduction des matrices à la forme normale (décomposition des représentations de dimension finie du groupe $\mathbf{Z}$),

la théorie des séries de Fourier (décomposition des représentations régulières du groupe $\mathbf{T}$),

la transformation de Fourier (décomposition de la représentation régulière du groupe $\mathbf{R}$),

la loi de l'addition des moments en mécanique quantique [décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles du groupe SO (3)].

8.1. Décomposition des représentations finies. Chaque représentation T est soit indécomposable, soit la somme directe de deux représentations $T = T_1 + T_2$. La même alternative s'applique aux représentations T_1 et T_2. Dans le cas général, ce procédé peut se

poursuivre indéfiniment. Appelons *finie* (respectivement *topologiquement finie*) la représentation T du groupe G dans l'espace V si chaque famille de sous-espaces G-invariants (respectivement de sous-espaces G-invariants fermés) dans V strictement monotone par inclusion est finie.

Chaque représentation de dimension finie est finie. La réciproque est évidemment fausse, car les représentations irréductibles sont toujours finies, sans pour cela nécessairement de dimension finie.

Problème 1. Chaque représentation (topologiquement) finie est la somme (topologiquement) finie de représentations finies irréductibles.

Problème 2. Supposons que la représentation T dans l'espace V soit (topologiquement) finie. Démontrer qu'il existe une famille finie strictement monotone de sous-espaces (fermés) invariants

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

tels que les représentations T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dans V_i/V_{i-1} sont (topologiquement) irréductibles.

Les familles $\{V_i\}$ qui satisfont aux conditions du problème 2 s'appellent admissibles. Pour les représentations finies, on a

Théorème 1 (Jordan-Gölder). *La longueur d'une famille admissible et les classes d'équivalence des représentations T_i (à l'ordre près) sont bien définies par la classe d'équivalence de la représentation T.*

Effectuons la démonstration par récurrence sur la longueur des familles admissibles. Supposons le théorème démontré pour toutes les familles admissibles de longueur $n - 1$, et soit $\{V_i\}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, une famille admissible de la représentation T dans l'espace V. Considérons une autre famille admissible quelconque:

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{m-1} \subset W_m = V,$$

et posons $W'_i = W_i \cap V_{n-1}$. La suite $\{W'_i\}$, $0 \leqslant i \leqslant m$ possède évidemment toutes les propriétés d'une famille admissible, sauf la propriété d'être strictement monotone.

Problème 3. Démontrer qu'il existe un indice $j \in [1, m]$ tel que $W'_{j-1} = W'_j$ et la famille $\{W'_i\}$, $i \neq j$, soit strictement monotone.

Indication. Soit W''_i l'image de W_i dans V/V_{n-1}. Puisque V/V_{n-1} est irréductible, pour un certain $j \in [1, m]$ nous avons alors les relations

$$W''_0 = W''_1 = \ldots = W''_{j-1} = \{0\}, \quad W''_j = W''_{j+1} = \ldots = W''_m = V/V_{n-1}.$$

Vérifier que W'_i/W'_{i-1} est isomorphe à W_i/W_{i-1} pour $i \neq j$, et $W'_j/W'_{j-1} = \{0\}$.

Par hypothèse de récurrence, les classes de représentations engendrées dans W'_i/W'_{i-1} pour $i \in [1, m]$, $i \neq j$, sont les mêmes que celles

des représentations $T_1, \ldots, T_{n-1}$. En particulier, nous obtenons $m = n$. En outre, la représentation engendrée dans W_j/W_{j-1} est évidemment équivalente à T_n.

Pour démontrer le théorème, il suffit de le vérifier pour $n = 1$, ce qui est trivial.

Corollaire. *Le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations finies est un groupe abélien libre, engendré par les classes d'équivalence des représentations irréductibles.*

Pour les représentations topologiquement finies, le théorème de Jordan-Gölder n'est plus forcément vrai.

Citons un exemple. Soit H un espace hilbertien avec base $\{e_i\}$, $1 \leqslant i < \infty$. Désignons par G_N le groupe des opérateurs inversibles dans H qui possèdent la propriété: $(Ae_i, e_j) = (e_i, e_j)$ si $i > N$ et $j > N$. Posons $G_\infty = \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N$. Introduisons l'opérateur Λ: $e_k \to \lambda_k e_k$, où $\{\lambda_k\}$ est une suite de nombres positifs tendant vers 0 pour $k \to \infty$.

Dans l'espace $V = H \oplus H$ considérons le groupe G des opérateurs définis par les matrices de la forme

$$g = \begin{pmatrix} A & \Lambda^{-1}B - A\Lambda^{-1} \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $A, B \in G_\infty$.

Soit V_1 l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et V_1' l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ \Lambda x \end{pmatrix}$, $x \in H$. On peut vérifier que $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 = V$ et $\{0\} = V_0' \subset V_1' \subset V_2' = V$ sont deux familles admissibles, faisant apparaître des familles de représentations topologiquement irréductibles différentes

$$T_1(g) = A,\ T_2(g) = B;\ T_1'(g) = \Lambda^{-1}B\Lambda,\ T_2'(g) = \Lambda A \Lambda^{-1}.$$

La démonstration ci-dessus ne peut être appliquée au cas topologique, parce que l'image d'un sous-espace fermé par une application continue n'est pas nécessairement fermé.

Dans notre exemple, l'image V_1' dans V/V_1 n'est pas fermée (elle est isomorphe à l'image de l'opérateur Λ). On peut également montrer que la longueur de la famille admissible n'est plus invariante dans le cas topologique aussi. L'exemple correspondant est basé sur le fait que, dans un espace hilbertien H, on peut indiquer trois sous-espaces V_1, V_2 et W, tels que $V_1 \subset V_2$, $W \cap V_2 = 0$ et $(W \cup V_1)^\perp = 0$.

Le résultat du problème 2 réduit l'étude des représentations finies à celle des représentations irréductibles et de certaines relations particulières entre elles. Explicitons le caractère de ces relations pour le cas $n = 2$.

Soit T une représentation réductible du groupe G dans l'espace V.

Examinons à quel point la représentation T peut être définie par sa sous-représentation et par la représentation quotient correspondante. Soit V_1 un sous-espace invariant et V_2 un espace qui lui est supplémentaire.

Dans le cas topologique nous devons supposer que V_1 soit un sous-espace fermé supplémentable, c'est-à-dire qu'il existe un sous espace fermé V_2, tel que V est isomorphe à $V_1 \oplus V_2$ (somme dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques).

Dans un espace hilbertien V chaque sous-espace fermé V_1 est supplémentable. Il suffit pour cela de poser $V_2 = V_1^{\perp}$.

Dans les espaces de Banach cela n'est pas ainsi. Par exemple, dans l'espace C (**T**) le sous-espace H des fonctions continues possédant un prolongement analytique à l'intérieur du cercle n'est pas supplémentable.

Désignons par $T_1(g)$ la restriction de $T(g)$ à V_1, par $T_2(g)$ la restriction de $T(g)$ à V_2, suivie de la projection sur V_2 parallèle à V_1 et par $T_{12}(g)$ la restriction de $T(g)$ à V_2 suivie d'une projection sur V_1 parallèle à V_2. L'opérateur $T(g)$ se met alors sous forme de matrice :

$$\begin{pmatrix} T_1(g) & T_{12}(g) \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Il est évident que T_1 est une sous-représentation et T_2 la représentation quotient de T. L'application $g \mapsto T_{12}(g) \in \operatorname{Hom}(V_2, V_1)$ n'est pas une représentation. Elle satisfait à l'identité suivante découlant de la loi de multiplication des matrices de la forme (1):

$$T_{12}(g_1g_2) = T_{12}(g_1)\, T_2(g_2) + T_1(g_1)\, T_{12}(g_2). \tag{2}$$

Posons $Z(g) = T_{12}(g)\, T_2(g)^{-1}$.

Problème 4. Démontrer que l'identité (2) équivaut au fait que $Z(g)$ est un cocycle de dimension un sur le groupe à valeurs dans l'espace $\operatorname{Hom}(V_2, V_1)$ sur lequel G agit suivant la formule $g\colon A \mapsto T_1(g)\, A\, T_2(g)^{-1}$

Le cocycle construit dépend non seulement de la représentation initiale T dans l'espace V, mais aussi du choix de l'espace supplémentaire V_2.

Problème 5. Démontrer qu'un autre choix de V_2 amène à remplacer $Z(g)$ par un cocycle cohomologique quelconque.

Par conséquent, la représentation T définit une certaine classe de cohomologies $h \in H^1(G, \operatorname{Hom}(V_2, V_1))$, tout en étant définie elle-même (à équivalence près) par cette classe. Nous allons désigner par le symbole $[T_1, h, T_2]$ la classe d'équivalence de la représentation T. En particulier, $[T_1, 0, T_2] = [T_1 + T_2]$.

Ainsi, pour rétablir la représentation indécomposable T à partir de sa sous-représentation T_1 et de la représentation quotient T_2, il nous faut savoir une certaine classe non nulle de cohomologies du groupe G.

Le cas général (n représentations irréductibles T_i) peut être étudié par itération des raisonnements ci-dessus. Il serait intéressant d'obtenir une méthode directe pour retrouver T à partir de la famille (ordonnée) des composantes irréductibles $\{T_i\}$ dont il s'agit au problème 2.

Un autre problème non résolu: comment appliquer cette construction de cohomologies de dimension un au cas topologique. Pour les sous-espaces fermés supplémentables la théorie correspondante a déjà été construite (voir, par exemple, l'article de C. Moore [119]).

Le cas général est bien plus difficile. Il a pour sous-problème la théorie des extensions des espaces de Banach qui n'est pas suffisamment élaborée même aujourd'hui.

8.2. Représentations irréductibles. La propriété suivante très simple mais fort importante joue un grand rôle dans la théorie des représentations.

Théorème 1 (lemme de Shur). *Si les représentations T_1, T_2 sont algébriquement irréductibles, chaque opérateur d'entrelacement $A \in \mathscr{C}(T_1, T_2)$ est soit nul, soit inversible.*

La démonstration découle directement du fait que $\ker A \subset V_1$ et $\operatorname{im} A \subset V_2$ sont des sous-espaces invariants et, par conséquent, sont nuls ou coïncident avec l'espace tout entier.

Corollaire 1. *Deux représentations algébriquement irréductibles sont soit équivalentes, soit disjointes.*

Corollaire 2. *Si T est une représentation algébriquement irréductible dans un espace linéaire sur un corps K, alors la famille $\mathscr{C}(T)$ de tous les opérateurs d'entrelacement est un corps non nécessairement commutatif sur le corps K.*

Dans les cas suivants, importants pour les applications, cet énoncé peut être précisé.

Théorème 2. *Supposons que la dimension de la représentation irréductible T dans un espace sur le corps K soit au plus dénombrable. Alors, si $K = \mathbf{C}$, nous avons $\mathscr{C}(T) \approx \mathbf{C}$; si $K = \mathbf{R}$, alors $\mathscr{C}(T)$ est isomorphe soit à $\mathbf{R}$, soit à $\mathbf{C}$, soit à $\mathbf{H}$.*

Démonstration. Supposons $A \in \mathscr{C}(T)$. Considérons l'expression $p(A)$, où p est un polynôme à coefficients dans K. Si tous les opérateurs $p(A)$ ne sont pas nuls pour $p \not\equiv 0$, alors le corps $\mathscr{C}(T)$ contient le sous-anneau $K[A]$ isomorphe à l'anneau des polynômes, et, par conséquent, le corps $K(A)$ isomorphe à celui des fonctions rationnelles.

Problème 1. Démontrer que le corps $K(A)$ est de dimension continuale sur K.

Indication. Tous les éléments de la forme $(A - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in K$ sont linéairement indépendants sur K.

Problème 2. Si x est un vecteur non nul de V, l'application $A \mapsto Ax$ est alors une injection de $\mathscr{C}(T)$ dans V.

Les résultats des problèmes 1 et 2 montrent que l'hypothèse $p(A) \neq 0$ faite pour $p \not\equiv 0$ contredit la dénombrabilité de la dimension de V.

Par conséquent, chaque élément $A \in \mathscr{C}(T)$ satisfait à une certaine équation algébrique $p(A) = 0$. Rappelons maintenant que chaque polynôme sur le corps **C** se développe en facteurs linéaires, et sur le champ **R** en facteurs du premier et du second degré.

Dans le cas $K = \mathbf{C}$ on en déduit immédiatement que $\mathscr{C}(T) = \mathbf{C}\cdot 1$; dans le cas $K = \mathbf{R}$ on peut seulement dire que chaque élément $A \in \mathscr{C}(T)$ engendre dans $\mathscr{C}(T)$ un sous-corps, isomorphe à **R** ou à **C**.

Problème 3. Démontrer que k éléments quelconques $A_1, \ldots, A_k$ du corps $\mathscr{C}(T)$ engendrent un sous-corps D de dimension $\leqslant 2^k$.

Indication. L'espace engendré par tous les monômes de la forme $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_l}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_l$, est invariant par rapport à la multiplication par les générateurs, car $A_i^2 = a_iA_i + b_i1$ et $A_iA_j + A_jA_i = (A_i + A_j)^2 - A_i^2 - A_j^2 = \alpha_{ij}A_i + \beta_{ij}A_j + \gamma_{ij}1$.

Problème 4. Démontrer que deux éléments quelconques $A, B \in \mathscr{C}(T)$ engendrent un sous-corps $D \subset \mathscr{C}(T)$ isomorphe soit à **C**, soit à **R**, soit à **H**.

Indication. Il suffit de considérer le cas où D contient **C** comme sous-corps et ne coïncide pas avec **C**. D'après le résultat du problème précédent, on a $\dim_{\mathbf{C}} D = 2$. Considérer la transformation $I: D \to D: x \mapsto ixi^{-1}$, où i est l'unité imaginaire dans **C**. En diagonalisant I, on obtient $D = \mathbf{C} + j\mathbf{C}$, où j est un élément qui possède les propriétés $j^2 = -1$, $ji = -ij$.

Problème 5. Démontrer que trois éléments quelconques $A, B, C \in \mathscr{C}(T)$ engendrent un sous-corps D isomorphe soit à **R**, soit à **C**, soit à **H**.

Indication. Il suffit de démontrer que le cas où D est un espace à gauche de dimension deux sur **H**, avec base $1, l$, où $l^2 = -1$, est impossible.

Problème 6. Chaque corps de dimension finie sur **R** est isomorphe à **R**, **C** ou **H**.

Indication. Faire appel au résultat du problème 5 et à une récurrence sur la dimension.

Il est évident que le théorème 2 se déduit des problèmes 3 et 6.

Corollaire. *Pour une représentation irréductible T, le nombre d'entrelacement $c(T)$ est égal à* 1, si $K = \mathbf{C}$, *et prend les valeurs* 1, 2 *et* 4, *si* $K = \mathbf{R}$.

Une représentation réelle T s'appelle *représentation de type réel, complexe* ou *quaternionique*, selon la forme du corps $\mathscr{C}(T)$.

Il est clair que la représentation de type complexe (respectivement quaternionique) s'obtient d'une représentation complexe (respectivement quaternionique) par restriction du corps des scalaires. Plus loin nous donnerons pour les groupes compacts le critère d'appartenance d'une représentation donnée à l'un des trois types.

Il se trouve que le type d'une représentation est bien caractérisé par l'élargissement du corps des scalaires de **R** à **C**.

Théorème 3. *Soit $T_{\mathbf{C}}$ la complexification de la représentation réelle T. Si T est une représentation irréductible de type réel, complexe ou quaternionique, $T_{\mathbf{C}}$ est irréductible ou représente la somme de deux représentations irréductibles non équivalentes, ou la somme de deux représentations irréductibles équivalentes respectivement.*

Corollaire. *Si T est une représentation réelle irréductible de type réel, complexe ou quaternionique, l'algèbre $\mathscr{C}(T_{\mathbf{C}})$ est isomorphe à* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ *ou à* $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})$ *respectivement.*

Ce corollaire se déduit également du fait plus général suivant.

Problème 7. Démontrer que $\mathscr{C}(T_{\mathbf{C}}) = \mathscr{C}(T) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$.

Indication. L'espace $V_{\mathbf{C}}$ de la représentation $T_{\mathbf{C}}$ peut être réalisé sous forme de somme directe $V \oplus V$, où V est l'espace de la représentation T. Alors l'algèbre $\mathscr{C}(T_{\mathbf{C}})$ sera réalisée comme sous-algèbre de $\mathrm{Mat}_2(\mathscr{C}(T))$ formée des éléments permutables à l'opérateur $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui définit dans $V_{\mathbf{C}}$ la multiplication par i.

La démonstration du théorème 3 s'obtient en considérant les sous-espaces réels invariants de $V_{\mathbf{C}} \approx V \oplus V$.

D'après le lemme de Shur, chaque espace W est envoyé dans 0 ou bien par projection sur chaque terme dans l'espace tout entier. Par conséquent, W peut prendre l'une des formes suivantes:

1) $W = \{0\} \oplus \{0\}$,
2) $W = \{0\} \oplus V$,
3) $W = V \oplus \{0\}$,
4) $W = V \oplus V$,
5) $W = \{(x, Ax), x \in V\}$, où A est un élément non nul de $\mathscr{C}(T)$.

Il est naturel d'appeler graphique de l'opérateur A ce dernier espace.

Problème 8. Les sous-espaces complexes invariants non triviaux W de $V_{\mathbf{C}}$ sont les graphiques des opérateurs $A \in \mathscr{C}(T)$ tels que $A^2 = -1$.

Indication. L'espace W sera un sous-espace complexe de $V_{\mathbf{C}}$ si et seulement si l'opérateur $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, qui définit dans $V_{\mathbf{C}}$ la multiplication par i, l'envoie dans soi-même.

Si $\mathscr{C}(T) = \mathbf{R}$, de tels opérateurs n'existent pas, et l'espace $V_{\mathbf{C}}$ est irréductible.

Si $\mathscr{C}(T) = \mathbf{C}$, il existe précisément deux opérateurs A de ce type (correspondant aux éléments $\pm i \in \mathbf{C}$). Par conséquent, il existe précisément deux sous-espaces invariants non triviaux admettant donc la réalisation des représentations irréductibles non équivalentes (cf. 8.3).

Si enfin $\mathscr{C}(T) = \mathbf{H}$, il existe un nombre infini d'opérateurs A possédant la propriété nécessaire. Ils sont tous envoyés l'un dans l'autre par les automorphismes internes de $\mathbf{H}$. Ainsi, dans ce cas $V_{\mathbf{C}}$ est la somme de deux sous-espaces, admettant la réalisation des représentations équivalentes.

8.3. Représentations complètement réductibles. Supposons donnée une décomposition de l'espace V où agit la représentation T

en somme directe de sous-espaces invariants V_i: $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Désignons par P_i le projecteur sur V_i parallèle aux autres V_j.

Problème 1. Les opérateurs P_i possèdent les propriétés:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & P_i^2 = P_i, \\ \text{b)} & P_i P_j = P_j P_i = 0 \text{ pour } i \neq j, \\ \text{c)} & \sum_{i=1}^{n} P_i = 1, \\ \text{d)} & P_i \in \mathscr{C}(T). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

La réciproque est également vraie (voir problème 2).

Problème 2. Chaque collection d'opérateurs aux propriétés (1) dans l'espace V engendre une décomposition de V en somme directe de sous-espaces invariants $V_i = P_i V$.

Indication. La propriété a) signifie que P_i est un opérateur de projection sur le sous-espace $V_i = P_i V$ parallèlement au sous-espace $W_i = (1 - P_i) V$. La propriété b) signifie que les espaces V_i sont linéairement indépendants. La propriété c) signifie que la somme de tous les V_i coïncide avec V. La propriété d) enfin équivaut à l'invariance de V_i.

Les éléments d'un anneau qui possèdent la propriété $x^2 = x$ s'appellent *idempotents*. Deux idempotents x et y s'appellent *orthogonaux*, si $xy = yx = 0$. Les résultats des problèmes 1 et 2 montrent que l'espace V se décompose en somme de sous-espaces invariants si et seulement si l'unité dans l'anneau $\mathscr{C}(T)$ se décompose en somme d'idempotents orthogonaux.

L'ensemble des idempotents admet la relation d'ordre suivante $x < y$, si $xy = yx = x$.

Problème 3. Soient P et Q deux idempotents dans l'anneau des opérateurs linéaires dans l'espace V. Démontrer que la relation $P < Q$ équivaut à l'inclusion $PV \subset QV$.

Corollaire. *Aux décompositions de l'espace V d'une représentation T en somme de sous-espaces irréductibles correspondent les décompositions de l'unité dans $\mathscr{C}(T)$ en somme d'idempotents minimaux.*

Supposons la représentation T complètement réductible et finie. Alors, elle est la somme d'un nombre fini de représentations irréductibles: $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$. D'après le théorème de Jordan-Gölder (voir 8.1), les classes des représentations T_i sont définies d'une façon unique.

Cependant, les sous-espaces V_i, dans lesquels agissent ces représentations, peuvent en général être choisis de différentes façons.

Pour décrire le problème ainsi posé il est utile d'introduire la définition suivante.

La représentation T s'appelle *primaire*, si elle ne peut pas être mise sous forme de somme de deux représentations disjointes.

Problème 4. Montrer qu'une représentation finie complètement réductible T est primaire si et seulement si toutes ses composantes irréductibles sont équivalentes.

Indication. Recourir au théorème de Jordan-Gölder, au lemme de Shur et à l'additivité des nombres d'entrelacement.

Problème 5. Démontrer qu'une représentation finie complètement réductible est primaire si et seulement si elle est de la forme $T = U \otimes S$, où U et S sont des représentations irréductible et triviale (c'est-à-dire telle que $S(g) \equiv 1$) respectivement.

Indication. Faire appel à l'isomorphisme $V \underset{K}{\otimes} K^n = V \oplus \ldots \oplus V$ (n termes) et au résultat du problème 1.

Théorème 1. *Soit T une représentation finie complètement réductible dans l'espace V. Alors, il existe une décomposition unique de V en somme de sous-espaces invariants V_i telle que les représentations $T_i = T|_{V_i}$ sont primaires et disjointes deux à deux. Chaque sous-espace invariant $W \subset V$ possède la propriété $W = \bigoplus_i W \cap V_i$.*

La démonstration de l'existence est fort simple. Si T n'est pas primaire, elle est la somme de deux termes disjoints T_1 et T_2. La même alternative s'applique alors à T_1 et T_2. En continuant ce procédé, nous en arrivons à la décomposition de T en somme de représentations primaires disjointes deux à deux $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$.

Soient V_i les sous-espaces dans lesquels agissent les T_i, et P_i les opérateurs de projection sur V_i parallèlement à la somme des autres V_j.

Problème 6. Les opérateurs P_j appartiennent au centre de l'algèbre $\mathscr{C}(T)$.

Indication. Si $A \in \mathscr{C}(T)$, alors $P_jAP_i \in \mathscr{C}(T_i, T_j)$. Vu que le T_i sont disjoints deux à deux, on a $P_jAP_i = 0$ pour $i \neq j$. Par conséquent,

$$A = \Big(\sum_j P_j\Big) \cdot A \cdot \Big(\sum_i P_i\Big) = \sum_{i,j} P_jAP_i = \sum_i P_iAP_i.$$

Donc, $AP_i = P_iAP_i$ et $P_iA = P_iAP_i$.

Le résultat du problème 6 admet une réciproque dans le sens suivant. Soit $C(\mathscr{C}(T))$ le centre de l'algèbre $\mathscr{C}(T)$.

Problème 7. Si le projecteur P appartient à $C(\mathscr{C}(T))$, alors les espaces $W_1 = PV$ et $W_2 = (1 - P)V$ sont invariants et les représentations $S_1 = T|_{W_1}$ et $S_2 = T|_{W_2}$ qui se définissent sur ces espaces sont disjointes.

Indication. L'invariance de W_1 et de W_2 équivaut à la condition $P \in \mathscr{C}(T)$. Le fait que S_1 et S_2 sont disjointes découle des relations $\mathscr{C}(S_1, S_2) = (1 - P)\mathscr{C}(T)P$, $\mathscr{C}(S_2, S_1) = P\mathscr{C}(T)(1 - P)$.

Des résultats des problèmes 6 et 7 il s'ensuit que les décompositions de la représentation T en somme de sous-représentations disjointes et celles de l'unité de $C(\mathscr{C}(T))$ en somme d'idempotents orthogonaux correspondent bijectivement.

La décomposition de T en représentations disjointes primaires correspond évidemment à celle de l'unité de $C(\mathscr{C}(T))$ en somme d'idempotents minimaux.

P r o b l è m e 8. Démontrer que dans un anneau commutatif la décomposition de l'unité en une somme d'idempotents minimaux est unique (si toutefois elle existe).

I n d i c a t i o n. Si x et y sont deux idempotents permutables, alors xy est également idempotent et l'on a $xy < x$, $xy < y$.

Démontrons la dernière affirmation du théorème 1. Soit W un sous-espace invariant de V. Désignons par P le projecteur sur W parallèlement à l'espace supplémentaire invariant (ce dernier existe évidemment car T est complètement réductible). Alors $P \in \mathscr{C}(T)$. D'autre part, $P = P \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} PP_i$.

Vu que $P_i \in C(\mathscr{C}(T))$, les opérateurs P et P_i sont permutables. Les opérateurs PP_i sont donc des projecteurs sur les sous-espaces $PP_iV = W \cap V_i$. Par conséquent

$$W = PV = \left(\sum_{i=1}^{n} PP_i\right) V = \bigoplus_{i=1}^{n} (W \cap V_i),$$

et le théorème est démontré.

La décomposition d'une représentation primaire réductible en composantes irréductibles n'est jamais unique. En effet, supposons que la représentation primaire T soit de la forme $U \otimes S$, où U est une représentation irréductible dans l'espace W' et S une représentation triviale dans l'espace W'' (voir problème 5).

Chaque décomposition de W'' en somme de sous-espaces de dimension un W''_i, $i = 1, 2, \ldots, \dim W''$ engendre une décomposition de l'espace $V = W' \otimes W''$ en somme de sous-espaces irréductibles $V_i = W' \otimes W''_i$. Si T est réductible, alors $\dim W'' > 1$ et une telle décomposition n'est pas unique.

P r o b l è m e 9. Si $\mathscr{C}(U) = K$, alors chaque sous-espace invariant de V est de la forme $W' \otimes W''_0$, où W''_0 est un certain sous-espace de W''.

I n d i c a t i o n. Faire appel à l'isomorphisme $\mathscr{C}(T) = \mathrm{Mat}_n(\mathscr{C}(U))$, où $n = \dim W''$.

Citons une condition suffisante pour rendre une représentation complètement réductible que nous utiliserons largement par la suite.

T h é o r è m e 2. *Si l'espace V d'une représentation T est engendré par ses sous-espaces irréductibles, T est complètement réductible.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit W un sous-espace invariant de V. Appelons admissible toute famille $\{V_\alpha\}$, $\alpha \in A$ de sous-espaces invariants irréductibles possédant la propriété suivante : si $x_\alpha \in V_\alpha$, $y \in W$ et $y = \sum_\alpha x_\alpha$, alors tous les x_α sont nuls. D'après le lemme de Zorn, il existe une famille admissible maximale $\{V_\alpha\}$. Alors $W' = \sum_{\alpha \in A} V_\alpha$ est un supplémentaire invariant de W. En effet, chaque sous-espace irréductible V_0 est entièrement inclus dans la somme $W + W'$, ou bien n'a pas d'éléments communs avec elle. La deuxième alternative contredit la maximalité de la famille $\{V_\alpha\}$.

Montrons pour conclure comment on peut déduire le théorème classique suivant des résultats ci-dessus.

T h é o r è m e 3 (B u r n s i d e). *Si T est une représentation irréductible du groupe G dans un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps algébriquement fermé K, l'enveloppe linéaire des opérateurs $T(g)$, $g \in G$ coïncide avec l'espace* End V *de tous les opérateurs linéaires de V.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons la représentation $\widetilde{T}$ du groupe G dans l'espace End V

$$\widetilde{T}(g) : A \mapsto T(g) A.$$

En identifiant End V à $V \otimes V^*$ (cf. **3.3**), nous remarquons que la représentation $\widetilde{T}(g)$ est le produit tensoriel de la représentation T dans V par une représentation triviale de dimension n dans V^*, $n = \dim V$. D'après le théorème 2, $\widetilde{T}$ est complètement réductible. Vu que le corps K est algébriquement fermé, le corps $\mathscr{C}(T)$ coïncide avec K. D'après le résultat du problème 9, chaque sous-espace invariant de End V est de la forme $W = V \otimes V_1$ où V_1 est un certain sous-espace de V^*. Choisissons une base de V de sorte que V_1 soit engendré par les k premières coordonnées. Alors W se réalise sous forme du sous-espace de $\mathrm{Mat}_n(K) \approx$ End V, composé de toutes les matrices dont seules les k premières colonnes sont non nulles.

Pour démontrer le théorème, il suffit de remarquer que l'enveloppe linéaire des opérateurs $T(g)$, $g \in G$ est un sous-espace invariant de End V et n'est pas inclus en aucun des sous-espaces de W du type décrit pour $k < n$.

C o r o l l a i r e. *Un groupe fini d'ordre N ne possède pas, sur un corps algébriquement fermé, de représentations irréductibles de dimension $> \sqrt{N}$.*

Nous verrons plus loin que ce résultat peut être précisé d'une façon essentielle (voir § 10).

8.4. Décomposition des représentations unitaires. Chaque représentation unitaire est complètement réductible. Par consé-

quent, les résultats obtenus dans le paragraphe précédent restent valables pour les représentations unitaires finies.

Or dans le cas unitaire on peut également construire une théorie de la décomposition pour les représentations infinies. La décomposition en somme directe y est souvent remplacée par celle en somme continue (intégrale) d'espaces hilbertiens. La nécessité d'une telle décomposition apparaît déjà dans les cas les plus simples.

Considérons, par exemple, la représentation T du groupe $\mathbf{R}$ dans l'espace $H = L^2(\mathbf{R})$, donnée par la formule

$$[T(t)f](x) = e^{itx}f(x).$$

Soit E un sous-ensemble mesurable quelconque de $\mathbf{R}$. Il est évident que le sous-espace $H(E) \subset H$, composé des fonctions nulles en dehors de E, est invariant par rapport aux opérateurs de représentation.

Problème 1. Chaque sous-espace fermé invariant de H est de la forme $H(E)$.

Indication. Chaque opérateur de $\mathscr{C}(T)$ est un opérateur de multiplication par une certaine fonction de x (cf. problème 10 de 4.4).

Corollaire. *La représentation T n'a aucune sous-représentation irréductible.*

En effet, chaque sous-espace $H(E)$ se réduit à zéro (si E possède une mesure nulle), ou bien possède des sous-espaces non triviaux invariants (si la mesure de E est positive).

Soit X un espace à mesure μ; supposons qu'à chaque point $x \in X$ correspondent un espace hilbertien H_x et une représentation unitaire T_x du groupe G dans H_x. On dit que la représentation unitaire T du groupe G est une *somme continue* (ou *une intégrale*) des représentations T_x pour la mesure μ et on la note $T = \int_X T_x d\mu(x)$, si:

1) l'espace H de la représentation T est la somme continue des espaces H_x pour la mesure μ (voir 4.5);

2) tous les opérateurs $T(g)$ sont décomposables et sont de la forme

$$[T(g)f](x) = T_x(g)f(x).$$

Il est évident que la représentation T ci-dessus du groupe $\mathbf{R}$ dans $L^2(\mathbf{R})$ est une somme continue de représentations de dimension 1

$$T_x(t) = e^{itx}.$$

La question se pose naturellement, à savoir: existe-t-il une décomposition d'une représentation quelconque T en somme continue de représentations plus simples (par exemple, irréductibles ou pri-

maires). D'après le théorème 1 de 4.5, la décomposition de l'espace H de la représentation T en somme continue $\int_X H_x d\mu(x)$ se définit par une C^*-sous-algèbre commutative $\mathscr{D}_0$ d'opérateurs diagonaux continus. L'espace X coïncide avec $\mathfrak{M}(\mathscr{D}_0)$ et la mesure μ avec celle de base de la représentation identique de $\mathscr{D}_0$ dans H. Il est clair que les opérateurs de la représentation T admettent une décomposition si et seulement si l'algèbre $\mathscr{D}_0$ est incluse dans $\mathscr{C}(T)$.

Cependant, cette condition n'est pas en général suffisante, car les relations

$$T_x(g_1 g_2) = T_x(g_1) T_x(g_2)$$

pour g_1 et g_2 fixes peuvent ne plus avoir lieu sur un ensemble dépendant de g_1 et g_2, de mesure nulle.

En outre, l'application $g \mapsto T_x(g)$ n'est pas, en général, continue. On peut surmonter ces difficultés en imposant certaines conditions supplémentaires sur le groupe G et l'espace H.

Théorème 1. *Soient un groupe G localement compact à base dénombrable et un espace H séparable. Alors chaque C^*-sous-algèbre commutative $\mathscr{D}_0$ de $\mathscr{C}(T)$ définit la décomposition de la représentation T en une somme continue*

$$T = \int_X T_x d\mu(x),$$

où $X = \mathfrak{M}(\mathscr{D}_0)$, et μ est la mesure de base de la représentation identique de $\mathscr{D}_0$.

Nous nous bornons ici à démontrer ce théorème dans le cas d'un groupe discret dénombrable. Le cas général sera examiné plus loin (voir § 10) après l'introduction de la notion d'anneau de groupe.

Vu que tous les opérateurs $T(g)$, $g \in G$ sont décomposables, il existe pour chaque $g \in G$ une famille mesurable d'opérateurs $T_x(g)$ telle que

$$[T(g) f](x) = T_x(g) f(x). \tag{1}$$

Pour g, g_1, g_2 fixes, les relations suivantes sont vérifiées pour presque tous les x

$$T_x(g)^* = T_x(g^{-1}), \quad T_x(g_1 g_2) = T_x(g_1) T_x(g_2). \tag{2}$$

Le groupe G étant dénombrable, on peut, en modifiant les opérateurs $T_x(g)$ sur un ensemble de mesure nulle, rendre valables les égalités (2) pour tous les $x \in X$, sans contredire aux égalités (1).

G étant discret, l'application $g \mapsto T_x(g)$ est continue et, d'après (2), définit une représentation unitaire de G dans l'espace H_x.

Théorème 2. *Supposons que la représentation unitaire T d'un groupe séparable G dans un espace hilbertien séparable H soit la somme continue des représentations T_x, $x \in X$, pour la mesure μ.*

Pour que presque toutes les représentations T_x soient irréductibles, il faut et il suffit que l'algèbre $\mathscr{D}$ des opérateurs diagonaux soit une sous-algèbre commutative maximale de $\mathscr{C}(T)$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que l'algèbre $\mathscr{D}$ ne soit pas maximale et que l'opérateur A appartienne à $\mathscr{D}^! \cap \mathscr{C}(T)$. Vu que $\mathscr{D}^! = \mathscr{R}$ se compose d'opérateurs décomposables, l'opérateur A est de la forme

$$[Af](x) = A_x f(x).$$

Supposons que $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ forment un sous-ensemble dénombrable dense dans G. Alors, presque partout sur X, on a les égalités $T_x(g_i) A_x = A_x T_x(g_i)$. Par conséquent, $A_x \in \mathscr{C}(T_x)$ pour presque tous les x.

Vu que $A \bar{\in} \mathscr{D}$, l'opérateur A_x n'est pas scalaire sur un certain ensemble E de mesure positive. Les représentations T_x sont donc réductibles pour $x \in E$.

Inversement, supposons les représentations T_x réductibles sur un ensemble E de mesure positive. Alors, $\mathscr{C}(T_x) = \mathbf{C}\cdot 1$ pour $x \in E$. Supposons que l'on ait pu choisir, pour chaque $x \in E$, un opérateur $A_x \in \mathscr{C}(T_x) \setminus \mathbf{C}\cdot 1$, tel que la famille $\{A_x\}$ soit mesurable. Alors, l'opérateur A, défini par cette famille, appartiendrait à $\mathscr{D}^! \cap \mathscr{C}(T)$ mais non pas à $\mathscr{D}$, ce qui démontrait que $\mathscr{D}$ n'est pas maximal.

La possibilité d'un choix de A_x mesurable découle du théorème suivant de Lousine-Jankov. Si X et Y sont des espaces métriques complets séparables, Y un compact et Z un sous-espace borélien dans $X \times Y$ dont la projection sur X coïncide avec X, il existe une application $f: X \to Y$ mesurable par rapport à toute mesure complète régulière sur X, telle que le graphique de f soit contenu dans Z.

Nous ne démontrons pas ici ce fait (pour cette démonstration voir l'appendice III du livre de M. Naimark [44]).

C o r o l l a i r e. *Chaque représentation unitaire T d'un groupe localement compact G à base dénombrable dans un espace séparable H peut être décomposée en somme continue de représentations irréductibles:*

$$T = \int_X T_x d\mu(x).$$

Il existe une certaine classe de représentations qui conservent, pour la décomposition, les traits principaux du cas fini (cf. 8.3). Nous dirons que la représentation T

1) possède un *spectre simple*, si l'algèbre $\mathscr{C}(T)$ est commutative,

2) possède un *spectre homogène de multiplicité n* (ou homogène de degré n), si elle est équivalente au produit tensoriel d'une représentation à spectre simple par une représentation triviale de dimension n,

3) appartient au *type* I, si elle est la somme de représentations homogènes.

Problème 2. Pour que la représentation T appartienne au type I (respectivement soit homogène de degré n), il faut et il suffit que l'algèbre $\mathscr{C}(T)$ le soit aussi (respectivement soit homogène de degré n).

Indication. Faire appel au théorème 1 et aux résultats de 4.5.

Ainsi chaque représentation de type I se met sous la forme $T = \sum_{k=1}^{k=\infty} U_k \otimes S_k$, où U_k est une représentation à spectre simple et S_k, une représentation triviale de dimension k. On appelle *apprivoisé* le groupe G si toutes ses représentations unitaires appartiennent au type I, et *sauvage* dans le cas contraire.

Cette terminologie, empruntée à la topologie géométrique (en anglais: « wild and tame knots ») reflète bien selon l'opinion personnelle de l'auteur la nature de ces groupes et de leurs représentations. Nous verrons plus loin que les groupes apprivoisés possèdent de nombreuses propriétés avantageuses, que les groupes sauvages ne possèdent pas, à savoir: l'unicité de la décomposition des représentations, l'existence des caractères, la semi-séparabilité de l'espace dual.

Problème 3. Démontrer que pour chaque groupe apprivoisé G toute représentation primaire est multiple d'une représentation irréductible.

Indication. Pour une représentation primaire, le centre de l'algèbre $\mathscr{C}(T)$ se compose d'opérateurs scalaires. Par conséquent, $\mathscr{C}(T)$ est un facteur de type I.

On peut montrer que cette propriété est caractéristique des groupes apprivoisés. Chaque groupe sauvage possède des représentations primaires, qui ne sont pas multiples de représentations irréductibles.

Pour les groupes apprivoisés, la théorie de la décomposition peut être définitivement résumée de la manière suivante.

Théorème 3. *Soient G un groupe localement compact apprivoisé à base dénombrable et T sa représentation unitaire dans un espace hilbertien séparable. Alors*

1) *il existe sur l'espace $\hat{G}$ dual à G une famille μ_k de mesures boréliennes, disjointes deux à deux telle que la représentation T s'écrit sous la forme*

$$T = \sum_{k=1}^{k=\infty} U_k \otimes S_k,$$

où S_k est une représentation triviale de dimension k et U_k une représentation à spectre simple, qui peut s'écrire sous forme de somme continue

$$U_k = \int_{\hat{G}} T_\lambda \, d\mu_k(\lambda).$$

(La représentation T_λ appartenant à la classe $\lambda \in \hat{G}$).

2) *Les mesures μ_k sont définies par la représentation T à équivalence près.*

10—0361

3) *Chaque famille* $\{\mu_k\}$ *de mesures boréliennes disjointes deux à deux est engendrée par une certaine représentation T de la manière décrite ci-dessus.*

Ce même résultat peut être énoncé en termes de décomposition en représentations primaires.

Chaque représentation T peut s'écrire sous la forme

$$T = \int_{\hat{G}} W_\lambda \, d\mu(\lambda),$$

où W_λ *est une représentation primaire de la forme* $T_\lambda \otimes S_\lambda$, T_λ *appartient à la classe* $\lambda \in \hat{G}$, S_λ *est une représentation triviale de dimension* $n(\lambda)$. *La mesure* μ *est définie par la représentation T à une équivalence près, et la fonction mesurable* $n(\lambda)$ *presque partout pour la mesure* μ.

Le passage d'un énoncé à l'autre est absolument identique à celui de 4.4.

La décomposition d'une représentation unitaire T en représentations primaires peut être construite pour tout groupe localement compact à base dénombrable. Pour cela, il suffit de prendre pour l'algèbre $\mathscr{D}$ des opérateurs diagonaux le centre de l'algèbre $\mathscr{C}(T)$. Cependant, les décompositions ultérieures ne seront plus déterminées d'une façon unique non seulement du point de vue du choix des sous-espaces de décomposition (ou, ce qui revient au même, de l'algèbre des opérateurs diagonaux), mais aussi du point de vue des composantes irréductibles elles-mêmes. Voir à ce sujet le § 19 de la troisième partie du livre.

La classe des groupes apprivoisés est suffisamment large.

P r o b l è m e 4. Démontrer que chaque groupe commutatif est apprivoisé.

I n d i c a t i o n. Si T est la représentation d'un groupe commutatif, alors l'algèbre $\mathscr{C}(T)^!$ est commutative. Par conséquent $\mathscr{C}(T)$ appartient au type I.

Nous verrons plus loin que tous les groupes compacts, les groupes semi-simples connexes, les groupes de Lie exponentiaux (en particulier, les groupes nilpotents) sont apprivoisés. On sait également (voir l'article [71]), que chaque groupe algébrique linéaire (c'est-à-dire chaque sous-groupe de $GL(n, \mathrm{R})$ défini par des équations algébriques) est apprivoisé.

Par contre, les groupes discrets sont en général sauvages. A savoir, un groupe discret dénombrable est apprivoisé si et seulement si il contient un sous-groupe commutatif d'indexe fini (voir l'article [135]).

Parmi les groupes de Lie résolubles certains sont apprivoisés, d'autres sauvages. Un critère qui permet de distinguer les deux cas sera donné au § 15.

§ 9. INTÉGRATION INVARIANTE

9.1. Mesures invariantes et moyens. Une des méthodes les plus puissantes pour l'étude des groupes topologiques et de leurs représentations est l'opération de moyen invariant. Soit L un espace vectoriel topologique, composé de fonctions sur un G-espace X, invariant par rapport aux translations. On appelle *moyen invariant* une forme linéaire positive [1]) sur L, invariante par rapport au groupe G. Le cas le plus important est celui où X est un groupe topologique et G le groupe des translations à gauche, à droite et des deux côtés sur X. Les moyens respectifs s'appellent respectivement *moyens à gauche*, *à droite* et *bilatères*.

Le groupe G s'appelle *amenable*, s'il existe un moyen invariant à gauche sur l'espace $B(G)$ de toutes les fonctions continues bornées sur G avec la norme $\| f \| = \sup\limits_G | f(x) |$. Dans ce cas, le sous-espace $B(G)$ formé de toutes les fonctions uniformément continues à droite possède un moyen bilatère.

C r i t è r e d e N e u m a n n. *Le groupe G n'est pas amenable si et seulement s'il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_N \in B(G)$ et des éléments $g_1, \ldots, g_N \in G$ tels que*

$$\sum_{i=1}^{N} [f_i(g) - f_i(g_i g)] \geqslant 1, \text{ quel que soit } g \in G.$$

On sait que tous les groupes résolubles sont amenables. Comme exemple de groupe non amenable on peut citer le groupe libre à deux générateurs ou un groupe de Lie non compact semi-simple quelconque.

Ces dernières années la théorie des groupes amenables a beaucoup progressé. Il s'est avéré que l'amenabilité des groupes localement compacts est équivalente à de nombreuses autres propriétés importantes: l'existence d'un point immobile pour chaque action affine d'un groupe sur un compact convexe, l'existence d'un moyen bilatère sur $B(G)$ et ce que l'on appelle « R-propriété »: la représentation triviale est faiblement contenue dans une représentation régulière, etc.

L'étude du moyen invariant sur $C_0(G)$ nous amène à la notion fondamentale de la mesure de Haar.

Dans le cas où G est compact, l'espace $C_0(G)$ coïncide avec $C(G)$ et le moyen invariant prend alors la forme

$$I(f) = \int_G f(x)\, d\mu(x), \tag{1}$$

où μ est une certaine mesure borélienne régulière (voir 4.1).

---

[1]) C'est-à-dire une forme prenant des valeurs non négatives sur les fonctions non négatives.

Lorsque G est localement compact et possède une base dénombrable, l'espace $C_0(G)$ est la réunion d'une famille dénombrable d'espaces de la forme $C(K)$, où K est un compact dans G. Dans ce cas, le moyen invariant (s'il existe) peut également être mis sous la forme (1), où μ est une certaine mesure σ-finie.

Théorème 1 (Haar). *Sur chaque groupe localement compact à base dénombrable il existe une mesure régulière borélienne non nulle invariante à gauche et σ-finie. Elle est définie d'une façon unique à un facteur numérique près.*

Cette mesure s'appelle *mesure de Haar à gauche*. On définit d'une manière analogue la *mesure de Haar à droite*.

Nous désignerons par $d_l g$ la mesure de Haar à gauche et par $d_r g$ à droite, en omettant les indices l et r dans les cas où il existe une mesure invariante bilatère.

On peut généraliser la notion de mesure (en éliminant la condition que cette mesure soit σ-finie) de sorte à avoir

Théorème 2 (A. Weyl). *Pour qu'il existe sur un groupe topologique complet G une mesure régulière borélienne non nulle et invariante à gauche il faut et il suffit que le groupe G soit localement compact. Si cette condition est satisfaite, la mesure invariante à gauche est définie d'une façon unique à un facteur numérique près.*

Pour des groupes concrets, il n'est généralement pas difficile de trouver explicitement une mesure invariante à gauche (cf. 6.4). Par conséquent, c'est surtout l'unicité qui est d'un intérêt particulier. Citons ici quelques formules utiles qui découlent de cette unicité.

Problème 1. Soit G un groupe localement compact. Il existe un homomorphisme continu Δ_G du groupe G dans le groupe des nombres réels positifs (pour la multiplication) tel que les égalités suivantes sont satisfaites:

$$d_r(xy) = \Delta_G(x)\, d_r y, \qquad d_l(xy) = \Delta_G(y)^{-1}\, d_l x. \tag{2}$$

$$d_r x = \text{const}\cdot\Delta_G(x)\, d_l x, \qquad d_l(x) = \text{const}\cdot\Delta_G(x)^{-1}\, d_r x, \tag{3}$$

$$d_r(x^{-1}) = \Delta_G(x)^{-1} d_r x = \text{const}\cdot d_l x, \quad d_l(x^{-1}) = \Delta_G(x)\, d_l x. \tag{4}$$

Indication. Le membre gauche de la première des égalités (2) est invariant à droite. Il existe donc un nombre $\Delta_G(x)$ tel que cette égalité est vérifiée. Il est évident que $x \mapsto \Delta_G(x)$ est un homomorphisme. Sa continuité découle de la formule $\Delta_G(x) = \int\limits_G f(x^{-1}y)\, d_r y$, où f est une fonction finie continue sur G satisfaisant à la condition $\int\limits_G f(y)\, d_r y = 1$. Les autres relations se déduisent d'une manière analogue.

Corollaire. *La classe d'équivalence de la mesure de Haar à gauche est invariante des deux côtés.*

On appelle parfois la fonction Δ_G *module* du groupe G. Si $\Delta_G \equiv 1$, on dit que le groupe G est *unimodulaire*. Dans ce cas, il existe une mesure invariante bilatère.

Problème 2. Démontrer que si le groupe G est compact, la mesure de Haar est finie et invariante des deux côtés.

Indication. Le groupe des nombres positifs pour la multiplication ne contient pas de sous-groupes compacts différents de $\{1\}$.

Dans de nombreuses questions de la théorie des représentations, il est plus commode de considérer seuls les groupes unimodulaires.

Définissons pour chaque groupe G localement compact les groupes G_0 et G_1 de la manière suivante:

G_0 est le noyau de l'homomorphisme Δ_G;

G_1 est le produit semi-direct de G et $\mathbf{R}$, associé à l'application $\Delta_G: G \to \operatorname{Aut} \mathbf{R}$.

Problème 3. Démontrer que les groupes G_0 et G_1 sont unimodulaires.

Citons quelques renseignements sur les mesures dans les G-espaces.

Théorème de Glimm[1]. *Pour les G-espaces métriques complets séparables X les conditions suivantes sont équivalentes*:

1. *Chaque G-orbite de X est localement fermée* (c'est-à-dire qu'elle est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé).

2. *L'espace quotient X/G est semi-séparé* (c'est-à-dire qu'il satisfait à l'axiome T_0).

3. *Il existe une famille dénombrable d'ensembles G-invariants boréliens dans X séparant tout couple de G-orbites.*

4. *Chaque mesure borélienne G-ergodique sur X se localise sur une des orbites.* (Rappelons qu'une mesure s'appelle *G-ergodique*, si la mesure de chaque ensemble mesurable G-invariant, ou bien de son supplémentaire, est nulle.)

Si X est un G-espace homogène et G un groupe localement compact, alors il existe sur X une mesure (unique à équivalence près) *quasi-invariante* (c'est-à-dire une mesure qui se transforme en mesure équivalente par toutes les translations). Dans le cas où X possède une base dénombrable, une telle mesure μ est équivalente à une mesure finie et peut être définie par l'égalité

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_G f(p(g))\, d\nu(g),$$

où p est la projection naturelle de G sur X, et ν une mesure finie sur G, équivalente à la mesure de Haar.

---

[1] Voir Glimm J., Locally compact transformation groups, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 124-138.

Supposons, par exemple, que $X = G/H$ soit un G-espace à gauche et s une application borélienne de X dans G telle que $p \circ s = 1$ (pour les groupes de Lie, cette application peut être choisie différentiable presque partout). Alors chaque élément de G se met d'une façon unique sous la forme

$$g = s(x)\,h, \qquad x \in X, \qquad h \in H, \tag{5}$$

de sorte que G s'identifie à $X \times H$.

Or, la mesure de Haar sur G est, dans ce cas, transformée dans une mesure équivalente au produit de la mesure quasi-invariante sur X par la mesure de Haar sur H. Nous avons donc l'égalité

$$d_r g = \rho(x, h)\, d\mu(x)\, d_r h.$$

En soumettant les deux membres de cette égalité aux translations à droite par éléments de H, on remarque aussitôt que la densité $\rho(x, h)$ ne dépend pas de h. Remplaçant μ par une mesure équivalente, on peut faire de sorte que pour ρ on puisse prendre toute fonction positive de x.

Il est naturel de choisir ρ tel que la mesure correspondante μ se transforme par les translations du G-espace X de la manière la plus simple. Pour cela il faut poser $\rho(x) = \Delta_G(s(x))$. Désignons par μ_s la mesure ainsi obtenue (elle dépend du choix de l'application s).

Problème 4. Démontrer que l'on a les égalités

$$d_l g = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\, d\mu_s(x)\, d_l h, \tag{6}$$

$$\frac{d\mu_s(gx)}{d\mu_s(x)} = \frac{\Delta_G(h(g, x))}{\Delta_H(h(g, x))}, \tag{7}$$

où $h(g, x)$ est défini par la relation

$$gs(x) = s(gx)\, h(g, x). \tag{8}$$

Problème 5. La mesure μ_s est définie par les relations (7) et (8) à un facteur numérique près.

Problème 6. L'espace $X = G/H$ possède une mesure G-invariante si et seulement si l'on a

$$\Delta_G(h) = \Delta_H(h) \text{ pour tout } h \in H. \tag{9}$$

Problème 7. Si la condition (9) est satisfaite, la mesure μ_s est G-invariante et ne dépend pas du choix de l'application s.

Il va sans dire que les résultats ci-dessus s'appliquent au cas d'un G-espace à droite $Y = H \backslash G$. Citons ici les formules correspon-

dantes:

$$g = hs(y), \quad h \in H, \quad y \in Y, \tag{5'}$$

$$d_r g = \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} d\nu_s(y) \, d_r h, \tag{6'}$$

$$\frac{d\nu_s(yg)}{d\nu_s(y)} = \frac{\Delta_H(h(y, g))}{\Delta_G(h(y, g))}, \tag{7'}$$

où $h(y, g)$ est défini par la relation

$$s(y) g = h(y, g) s(yg). \tag{8'}$$

Parfois, on peut trouver dans le groupe G un sous-groupe K complémentaire à H, dans le sens que presque chaque élément de G s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$g = k \cdot h, \qquad k \in K, \qquad h \in H.$$

Dans ce cas, il est naturel d'identifier $X = G/H$ à K et prendre pour l'application s l'inclusion de K dans G. Il est alors aisé de voir que la mesure μ_s sera alors une mesure de Haar à gauche sur K (vu que $h(k_1, k_2) = e$). La formule (6) se met alors sous la forme

$$d_l g = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} d_l k d_l h. \tag{10}$$

Si G est unimodulaire, cette égalité devient alors:

$$dg = d_l k \cdot d_r h. \tag{11}$$

Pour la démonstration du théorème de Weyl et des renseignements ultérieurs sur l'intégration sur les groupes, voir les livres [7], [56]. Pour un exposé détaillé de la théorie des groupes amenables voir le livre de F. P. Greenleaf, Invariant means on topological groups, Van Nonstrand Math. Studies, 16.

9.2. Applications aux groupes compacts. Soit G un groupe compact et dg une mesure de Haar sur G, normée par la condition $\int_G dg = 1$.

Considérons la représentation T du groupe G dans un espace topologique complet localement convexe V. Désignons par V_0 le sous-espace de V composé de tous les vecteurs G-invariants.

Théorème 1. *L'opérateur*

$$P = \int_G T(g) \, dg \tag{1}$$

permutable aux opérateurs de représentation coïncide avec l'opérateur de projection sur V_0

Avant de démontrer ce théorème, il faut expliquer ce que signifie l'intégrale (1).

Soit X un espace avec une mesure, f une fonction sur X à valeurs dans un espace localement convexe L. Nous appellerons f *faiblement intégrable*, si pour chaque $\chi \in L'$ la fonction scalaire $x \mapsto \langle \chi, f(x) \rangle$ est intégrable pour la mesure μ. On appelle *intégrale faible* de la fonction f pour la mesure μ l'élément de l'espace $(L')^*$ (algébriquement dual à L'), noté $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ et défini par l'égalité

$$\left\langle \chi, \int_X f(x)\, d\mu(x) \right\rangle = \int_X \langle \chi, f(x) \rangle\, d\mu(x) \text{ pour tout } \chi \in L'. \qquad (2)$$

On peut montrer que $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des valeurs de la fonction f sur X (ou sur un sous-espace quelconque de mesure complète dans X). Nous considérons ici l'espace L comme étant inclus dans $(L')^*$: chaque élément de L peut être considéré comme une forme linéaire sur L'.

En particulier, si X est un compact, et f une fonction continue, l'intégrale $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ est un élément de L. L'expression (1) peut être considérée comme intégrale d'une fonction sur G à valeurs dans l'espace End V.

P r o b l è m e 1. Démontrer, pour $\xi \in V$ quelconque, l'égalité

$$P(\xi) = \int_G T(g)\, \xi\, dg.$$

I n d i c a t i o n. Démontrer l'égalité $\langle \chi, P\xi \rangle = \langle \chi, \int_G T(g)\, \xi\, dg \rangle$ pour un $\chi \in V'$ quelconque, en comparant les deux membres avec l'expression $\int_G \langle \chi, T(g)\, \xi \rangle\, dg$.

On obtient donc en particulier $P(\xi) = \xi$, quel que soit $\xi \in V_0$.

P r o b l è m e 2. Si A est un opérateur borné dans V on a

$$AP = \int_G AT(g)\, dg, \quad PA = \int_G T(g)\, A\, dg.$$

I n d i c a t i o n. Quels que soient $\xi \in V$ et $\chi \in V'$, on a

$$\langle \chi, AP\xi \rangle = \left\langle \chi, A \int_G T(g)\, \xi\, dg \right\rangle = \int_G \langle \chi, AT(g)\, \xi \rangle\, dg.$$

Le théorème 1 se déduit maintenant des relations suivantes:

$$T(g)P = \int_G T(g)T(g_1)\,dg_1 = \int_G T(gg_1)\,dg_1 = \int_G T(g_2)\,dg_2 = P,$$

$$PT(g) = \int_G T(g_1)T(g)\,dg_1 = \int_G T(g_1g)\,dg_1 = \int_G T(g_2)\,dg_2 = P.$$

Ainsi, le calcul du moyen sur un groupe représente une méthode universelle pour construire les invariants du groupe: *pour chaque vecteur* $\xi \in V$, *le vecteur* $P\xi = \int_G T(g)\,\xi\,dg$ *est un invariant et tous les invariants s'obtiennent de cette manière.*

Déduisons de ce résultat quelques corollaires importants, qui forment le fondement de la théorie des représentations des groupes compacts.

Montrons tout d'abord que l'étude d'une représentation quelconque se réduit, dans une grande mesure, à l'étude des représentations unitaires. Soit T une représentation dans un espace vectoriel topologique V. Si χ est une forme linéaire continue sur V, l'expression

$$(\xi, \eta)_\chi = \int_G \langle \chi, T(g)\,\xi\rangle \overline{\langle \chi, T(g)\,\eta\rangle}\,dg \qquad (3)$$

est linéaire par rapport à ξ, antilinéaire par rapport à η, continue comme fonction de deux variables ξ et η et possède la propriété $(\xi, \xi)_\chi \geqslant 0$. Par conséquent, V s'avère muni d'une structure d'espace préhilbertien (voir 4.1). Soit H_χ l'espace hilbertien correspondant et φ_χ l'application naturelle de V dans H_χ. L'espace H_χ est muni d'une représentation T_χ, qui s'obtient de la représentation T par factorisation et prolongement par continuité. De l'égalité $(T(g)\,\xi, T(g)\,\eta)_\chi = (\xi, \eta)_\chi$, il découle que T_χ est unitaire.

Ainsi, pour chaque forme $\chi \in V'$ on a construit une représentation unitaire T_χ et un opérateur d'entrelacement $\varphi_\chi \in \mathscr{C}(V, H_\chi)$. Si l'espace V est localement convexe, l'intersection des noyaux de φ_χ pour tous les $\chi \in V'$ ne contient que zéro seul. L'examen des représentations unitaires T_χ permet dans ce cas de décrire entièrement V.

Problème 3. Supposons T topologiquement irréductible et $\chi \neq 0$. Démontrer que φ_χ est une inclusion continue de V dans H_χ, et que la représentation T_χ est également topologiquement irréductible.

Problème 4. Chaque représentation de dimension finie d'un groupe compact est équivalente à une représentation unitaire.

Soit maintenant T une représentation unitaire d'un groupe compact G dans un espace hilbertien H.

Pour ξ, $\eta \in H$ quelconques, nous désignerons par $t_{\xi, \eta}(g)$ la fonction $g \mapsto (T(g)\xi, \eta)$ et l'appellerons élément matriciel de la représentation T. (Si ξ et η sont les éléments d'une base orthonormée dans H, alors $t_{\xi, \eta}(g)$ est le coefficient correspondant de la matrice de l'opérateur $T(g)$.)

T h é o r è m e 2. *Chaque représentation T unitaire et topologiquement irréductible du groupe compact G est de dimension finie. Ses éléments matriciaux satisfont aux conditions*

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g)\overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)}\, dg = \frac{1}{\dim T}(\xi_1, \xi_2)\overline{(\eta_1, \eta_2)}. \tag{4}$$

Si T_1 et T_2 sont deux représentations irréductibles non équivalentes, chaque élément matriciel de la représentation T_1 est orthogonal, dans $L^2(G, dg)$, à chaque élément matriciel de la représentation T_2.

D é m o n s t r a t i o n. Le membre gauche de l'égalité (4) est linéaire et continu par rapport à ξ_1. Il est, par conséquent, de la forme (ξ_1, ζ), où ζ est un certain vecteur de H qui dépend de ξ_2, η_1 et η_2. Pour η_1 et η_2 fixes, le vecteur ζ est une fonction linéaire continue de ξ_2. Par conséquent, $\zeta = A\xi_2$, où A est un certain opérateur dans H dépendant de η_1 et de η_2.

L'égalité

$$t_{T(g)\xi, \eta}(g_1) = t_{\xi, \eta}(g_1 g)$$

montre que l'opérateur A possède la propriété

$$(T(g)\xi_1, AT(g)\xi_2) = (\xi_1, A\xi_2),$$

pour tous les $g \in G$. Par conséquent, $A \in \mathscr{C}(T)$ et, d'après le théorème 1 de **7.3**, $A = \lambda \cdot 1$. Le nombre λ dépend évidemment de η_1 et η_2. Raisonnant d'une manière analogue, on remarque que λ dépend de η_1 et η_2 de la façon suivante: $\lambda = c \cdot \overline{(\eta_1, \eta_2)}$. Ainsi, on a démontré l'égalité

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g)\overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)}\, dg = c(\xi_1, \xi_2)\overline{(\eta_1, \eta_2)}, \tag{5}$$

où la constante positive c ne dépend que de la représentation T. Soit maintenant $e_1, \ldots, e_n$ une famille de vecteurs orthonormés quelconque de H. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n} |(T(g)\xi, e_i)|^2 \leqslant \|T(g)\xi\|^2 = \|\xi\|^2.$$

Par conséquent, pour tout g

$$\sum_{i=1}^{n} |t_{\xi, e_i}(g)|^2 \leqslant \|\xi\|^2.$$

En intégrant cette inégalité sur le groupe G et en utilisant (5), nous obtenons l'inégalité $cn \| \xi \|^2 \leqslant \| \xi \|^2$, c'est-à-dire $c \leqslant 1/n$. D'où il s'ensuit immédiatement que T est de dimension finie. Si $\dim T = n$ et $e_1, \ldots, e_n$ est une base de H, l'inégalité ci-dessus devient une égalité et on obtient $c = 1/n = 1/\dim T$. La démonstration de la dernière affirmation du théorème est tout à fait analogue à celle de l'égalité (5). La seule différence est qu'au lieu de l'égalité $\mathscr{C}(T) = \mathbf{C} \cdot 1$ il faut recourir à l'égalité $\mathscr{C}(T_1, T_2) = 0$. Le théorème est démontré.

En comparant le résultat obtenu avec celui du problème 3, on comprend aisément que non seulement les représentations unitaires irréductibles, mais toutes les représentations topologiques irréductibles dans des espaces ayant au moins une forme linéaire continue non nulle, sont de dimension finie.

Corollaire 1. *Chaque représentation topologiquement irréductible d'un groupe compact dans un espace localement convexe est de dimension finie et équivalente à une représentation unitaire.*

Corollaire 2. *Pour un groupe compact G l'espace dual $\hat{G}$ est discret.*

Supposons que le groupe topologique G agisse d'une manière continue sur le groupe abélien topologique M. Désignons par $H_c^k(G, M)$ le groupe des *cohomologies continues* de dimension k de G à coefficients dans M, c'est-à-dire le groupe quotient du groupe $Z_c^k(G, M)$ des cocycles continus par le sous-groupe $B_c^k(G, M)$ des cobords des cochaînes continues.

Remarquons que ce dernier groupe peut ne pas coïncider avec le groupe des cobords continus: un cocycle discontinu peut posséder un cobord continu.

Théorème 3. *Soient G un groupe compact, V un espace vectoriel, dans lequel G agit suivant une certaine représentation T, et V^G l'ensemble des éléments G-invariants de V. Alors*

$$H_c^k(G, V) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k > 0, \\ V^G & \text{pour } k = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{F}^k$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur $G \times \ldots \times G$ (k facteurs) à valeurs dans V. Définissons l'action de G dans $\mathscr{F}^k$ en posant

$$g\colon f(g_1, \ldots, g_k) \mapsto T(g) f(g^{-1}g_1, \ldots, g^{-1}g_k).$$

Il est évident que l'ensemble des éléments G-invariants de $\mathscr{F}^k$ coïncide avec l'espace $C_c^{k-1}(G, V)$ des cochaînes continues de dimension $(k-1)$ du groupe G à coefficients dans V. L'opérateur d se prolonge naturellement de $C_c^{k-1}(G, V)$ à $\mathscr{F}^k$, de sorte que le diagram-

me

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{F}^1 & \to \ldots \to & \mathcal{F}^k & \to & \mathcal{F}^{k+1} & \to & \mathcal{F}^{k+2} & \to \ldots & \\
\uparrow i_1 & & \uparrow i_k & & \uparrow i_{k+1} & & \uparrow i_{k+2} & & (6) \\
C_c^0(G, V) & \to \ldots \to & C_c^{k-1}(G, V) & \to & C_c^k(G, V) & \to & C_c^{k+1}(G, V) & \to \ldots &
\end{array}$$

soit commutatif. Ici, les flèches verticales i_k sont des injections.

Problème 5. Démontrer que la ligne supérieure du diagramme (6) est une suite exacte pour $k \geqslant 2$.

Indication. Soit $f \in \mathcal{F}^k$. La condition $df = 0$ peut être mise sous la forme

$$(-1)^{k+1} f(g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i f(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_k),$$

d'où l'on a $f = dh$, où $h(g_0, \ldots, g_{k-1}) = (-1)^{k+1} f(g_0, \ldots, g_k)$.

D'après le théorème 1, le diagramme (6) peut être complété par les projections p_k de l'espace $\mathcal{F}^k$ sur $C_c^{k-1}(G, V)$, de manière à rester commutatif.

Montrons que de ce fait découle l'exactitude de la ligne inférieure, à partir de $k = 2$. En effet, si $z \in C_c^k(G, V)$ et $dz = 0$, alors $i_{k+2}\, dz = 0$ et, par conséquent, $di_{k+1}z = 0$. Donc, $i_{k+1}z = dw$ pour un certain $w \in \mathcal{F}^k$. Alors $dp_k w = p_{k+1} dw = p_{k+1} i_{k+1} z = z$. Le cas $k = 1$ est analogue et donne l'égalité $H^0(G, V) = V^G$.

Le théorème est démontré.

Corollaire 1. *Si la représentation d'un groupe compact est réductible et le sous-espace invariant est supplémentable, elle admet alors une décomposition.*

Corollaire 2. *Chaque extension topologique d'un groupe compact à l'aide d'un espace vectoriel est déployée.*

Remarquons que pour la démonstration du théorème 3 on faisait appel non pas au fait que G est compact, mais à la formule du théorème 1 qu'entraîne la compacticité de G. Nous verrons plus loin que cette formule est également valable pour les représentations de dimension finie des groupes semi-simples. D'où il s'ensuit que les corollaires 1 et 2 restent vrais pour les représentations de dimension finie des groupes semi-simples.

9.3. Applications aux groupes non compacts. Certains résultats obtenus plus haut peuvent être généralisés.

Ainsi, l' «unitarisation» de la représentation T (c'est-à-dire la construction des espaces H_χ, des représentations T_χ et des opérateurs d'entrelacement φ_χ) peut être réalisée pour toute représentation bornée T d'un groupe amenable G. Dans ce cas, il faut choisir pour $(\xi, \eta)_\chi$ le moyen invariant de la fonction bornée $g \mapsto \langle \chi, T(g)\xi \rangle \times \times \overline{\langle \chi, T(g)\eta \rangle}$.

P r o b l è m e 1. Chaque représentation bornée T d'un groupe amenable G dans un espace hilbertien H est équivalente à une représentation unitaire.

I n d i c a t i o n. Soit A le moyen invariant de la fonction opératoire $g \mapsto T(g)\, T(g)^*$. Démontrer que A est un opérateur invertible positif et $T_1(g) = A^{1/2}\, T(g)\, A^{-1/2}$ est une représentation unitaire.

La relation d'orthogonalité des éléments matriciaux (voir le théorème 2 de 9.2) admet également une généralisation. Soit G un groupe localement compact unimodulaire et T sa représentation unitaire irréductible. Appelons T *quadratiquement intégrable*, si tous ses éléments matriciaux appartiennent à $L^2(G, dg)$. (Il est aisé de vérifier que T possède cette propriété, si au moins un élément matriciel non nul appartient à $L^2(G, dg)$.)

P r o b l è m e 2. Démontrer que pour les représentations quadratiquement intégrables les relations suivantes sont vérifiées:

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g)\, \overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)}\, dg = c\,(\xi_1, \xi_2)\, \overline{(\eta_1, \eta_2)}, \qquad (1)$$

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g)\, \overline{s_{\xi_2, \eta_2}(g)}\, dg = 0, \qquad (2)$$

si T et S ne sont pas équivalentes.

C o r o l l a i r e. *Un groupe localement compact séparable possède au plus un ensemble dénombrable de représentations quadratiquement intégrables, non équivalentes deux à deux*

Remarquons que la constante c dans l'égalité (1) est égale dans le cas compact au rapport du volume du groupe (dans le sens de la mesure de Haar) à la dimension de la représentation. Dans le cas non compact ces deux grandeurs sont infinies toutes les deux, mais leur rapport c reste fini. La valeur c^{-1} s'appelle dimension formelle de la représentation T. Pour les groupes de Lie semi-simples réels, qui possèdent des représentations quadratiquement intégrables, on peut normer la mesure de Haar de sorte que toutes les dimensions formelles soient entières. Dans le cas général, ceci n'est pas démontré.

L'application la plus importante de l'intégration invariante dans le cas non compact est la construction, pour chaque groupe localement compact, d'un ensemble suffisamment vaste de représentations unitaires. Nous en reparlerons en plus de détail au § 13, nous limitant ici à l'affirmation suivante.

T h é o r è m e 1 (G e l f a n d - R a ï k o v). *Chaque groupe localement compact G possède un système complet de représentations unitaires irréductibles (c'est-à-dire qu'il existe pour chaque élément $g \neq e$ une représentation unitaire irréductible T telle que $T(g) \neq 1$).*

Dans le cas général, ce théorème sera démontré au numéro **10.3.** Pour les groupes séparables, il découle de la décomposition en composantes irréductibles de la représentation régulière G, qui agit

dans $L^2(G, d_l g)$ suivant la formule

$$[T(g)f](g_1) = f(g^{-1}g_1)$$

(voir les théorèmes 1 et 2 de 8.4).

§ 10. ALGÈBRES DE GROUPES

10.1. Anneau de groupe d'un groupe fini. Soit G un groupe fini. Désignons par $\mathbf{Z}[G]$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires formelles des éléments de G à coefficients entiers. On définit dans $\mathbf{Z}[G]$ d'une manière naturelle les opérations d'addition et de multiplication:

$$\left.\begin{aligned} \sum_i n_i g_i + \sum_i m_i g_i &= \sum_i (n_i + m_i) g_i, \\ \sum_i n_i g_i \cdot \sum_j m_j g_j &= \sum_{i,j} n_i m_j g_i g_j. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

L'anneau ainsi obtenu s'appelle *anneau de groupe* du groupe G. Il est clair que chaque représentation linéaire T du groupe G se prolonge à une représentation de son anneau de groupe, si l'on pose

$$T\left(\sum_i n_i g_i\right) = \sum_i n_i T(g_i). \quad (2)$$

Inversement, chaque représentation non dégénérée de l'anneau de groupe (c'est-à-dire une représentation qui envoie l'unité de l'anneau dans l'opérateur identique) s'obtient d'une représentation de G par la formule (2).

Par conséquent, la théorie des représentations du groupe G est tout à fait équivalente à celle des représentations des $\mathbf{Z}[G]$-modules. Si l'on s'intéresse aux représentations de G dans des espaces vectoriels sur le corps K, il est naturel de définir une *algèbre de groupe* $K[G]$ du groupe G sur le corps K en posant $K[G] = \mathbf{Z}[G] \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} K$. On peut considérer les éléments de $K[G]$ soit comme des combinaisons linéaires formelles des éléments de G à coefficients dans K, soit comme des fonctions sur G à valeurs dans K. Pour la deuxième interprétation, l'addition dans $K[G]$ est la somme usuelle des fonctions, tandis que la multiplication se définit par la formule

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{g_1 g_2 = g} f_1(g_1) f_2(g_2) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g). \quad (3)$$

La fonction $f_1 * f_2$ s'appelle *produit de convolution* des fonctions f_1 et f_2.

Il est évident que la catégorie $\Pi(G, K)$ des représentations de G dans des espaces linéaires sur le corps K est équivalente à la catégorie des $K[G]$-modules.

La propriété fondamentale des représentations des groupes finis est exprimée par le

Théorème de Mashke. *Si la caractéristique du corps K n'est pas un diviseur de l'ordre du groupe G, l'algèbre $K[G]$ est semi-simple.*

Démonstration. On peut définir un moyen invariant dans l'espace $K[G]$ en posant

$$I(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

Par conséquent, pour les représentations du groupe G sur le corps K, les théorèmes 1 et 3 de **9.2** sont vérifiés. En particulier, chaque représentation de dimension finie du groupe G (et, par conséquent, de l'algèbre $K[G]$) est une somme de représentations irréductibles. De ce fait et du résultat du problème 2 de **3.3**, il découle que le radical de $K[G]$ est contenu dans le noyau de chaque représentation de dimension finie. Mais la représentation de $K[G]$ dans l'algèbre $K[G]$ elle-même (par translations à gauche) possède un noyau nul. Donc, $K[G]$ est semi-simple.

Corollaire. *L'algèbre $K[G]$ est isomorphe au produit d'un nombre fini d'algèbres de la forme* $\mathrm{Mat}_m(D)$, *où D est un corps de dimension finie sur K.*

Ceci découle de la théorie générale des algèbres semi-simples de dimension finie (voir **3.5**). Pour un corps algébriquement fermé K, nous avons un résultat plus précis.

Théorème 2 (Burnside). *Soit G un groupe fini, k le nombre de classes d'éléments conjugués dans G, et K un corps algébriquement fermé. Alors il existe exactement k classes d'équivalence de représentations irréductibles de G. Leurs dimensions n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ sont liées par la relation*

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = |G|. \tag{4}$$

L'algèbre $K[G]$ est isomorphe au produit $\prod_{i=1}^{k} \mathrm{Mat}_{n_i}(K)$.

Démonstration. Soit $T_1, \ldots, T_r$ une famille complète de représentations irréductibles du groupe G, non équivalentes deux à deux. Prolongeons les représentations T_i à des représentations de l'algèbre $K[G]$, c'est-à-dire posons

$$T_i(f) = \sum_{g \in G} f(g) T_i(g).$$

Problème 1. L'application $f \mapsto \{T_i(f)\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est un épimorphisme de $K[G]$ sur l'algèbre $\prod_{i=1}^{k} \mathrm{End}\, V_i$, où V_i est l'espace de la représentation T_i.

Indication. Recourir aux relations d'orthogonalité (voir 9.2, théorème 2) des éléments matriciaux de la représentation T_i. Ces relations sont vérifiées d'après les égalités $\mathscr{C}(T_i) = K$.

Montrons que l'application f du problème 1 est en fait un isomorphisme.

En effet, le noyau de cette application coïncide avec le radical de $K[G]$ (voir le problème 2 de 3.3), et par conséquent, se compose d'un seul élément 0.

Vu que l'algèbre End V_i est isomorphe à $\text{Mat}_{n_i}(K)$, on a donc démontré la dernière affirmation du théorème.

L'égalité (4) découle de la comparaison des dimensions de $K[G]$ et de $\coprod_{i=1}^{r} \text{End } V_i$.

Il reste à démontrer que $r = k$.

Problème 2. Démontrer que la fonction $f \in K[G]$ appartient au centre de $K[G]$, si et seulement si elle est constante sur chaque classe d'éléments conjugués de G

Ainsi, la dimension du centre de l'algèbre $K[G]$ coïncide avec le nombre k de classes d'éléments conjugués du groupe G. Mais, d'autre part, le centre de l'algèbre $\coprod_{i=1}^{r} \text{Mat}_{n_i}(K)$ est évidemment de dimension r (il se compose de familles de matrices scalaires).

Le théorème 2 est entièrement démontré.

La structure des algèbres de groupe $K[G]$, pour un corps non algébriquement fermé, est assez bien étudiée dans le cas où la caractéristique d'un corps ne divise pas l'ordre du groupe. L'étude des algèbres $K[G]$ pour les corps qui ne satisfont pas à cette condition, de l'anneau $\mathbf{Z}[G]$ et de ses analogues $R[G]$, où R est l'anneau des éléments entiers d'un certain corps numérique, est considérablement plus difficile.

Pour les méthodes et les résultats principaux dans ce domaine de la théorie des représentations et leurs applications à la théorie des groupes finis voir les livres [13], [3].

10.2. Algèbres de groupes des groupes topologiques. La généralisation de la notion d'algèbre de groupe $K[G]$ au cas d'un groupe infini nous amène à plusieurs définitions non équivalentes.

Tout comme dans le cas fini, on peut considérer les combinaisons linéaires formelles d'un nombre fini d'éléments du groupe G à coefficients dans K. L'algèbre ainsi construite (que l'on désigne toujours par $K[G]$) est la généralisation de la notion d'algèbre de groupe la plus simple et la plus immédiate (mais non nécessairement la plus commode et la plus utile).

Nous citerons ici, pour le cas $K = \mathbf{C}$, les variantes de définition les plus usitées.

1. L'algèbre $l^1(G)$ est composée de fonctions complexes sur G qui satisfont à la condition

$$\|f\| = \sum_{g \in G} |f(g)| < \infty.$$

La multiplication est donnée par la formule

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g).$$

Problème 1. Démontrer que $l^1(G)$ est une algèbre de Banach à involution par rapport à l'opération

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}.$$

Cette variante de la définition, de même que celle de $K[G]$, reste en vigueur pour un groupe G quelconque. Malheureusement, l'objet ainsi défini est intimement lié à la structure algébrique du groupe G sans refléter sa topologie.

2. L'algèbre $M(G)$ est composée des mesures complexes boréliennes sur G. La norme dans $M(G)$ est de la forme

$$\|\mu\| = |\mu|(G),$$

et l'opération de convolution, qui joue le rôle de multiplication, se définit par la formule

$$\int_G f(g)\, d(\mu_1 * \mu_2)(g) = \int_G \int_G f(g_1 g_2)\, d\mu_1(g_1)\, d\mu_2(g_2),$$

pour chaque fonction f mesurable et bornée.

Problème 2. Démontrer que $M(G)$ est une algèbre de Banach à involution $\mu \mapsto \mu^*$ définie par l'égalité

$$\int_G f(g)\, d\mu^*(g) = \overline{\int_G \overline{f(g^{-1})} d\mu(g)}.$$

Désignons par $M_0(G)$ la sous-algèbre de $M(G)$ composée des mesures boréliennes régulières à supports compacts.

Problème 3. Démontrer que l'algèbre $l^1(G)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $M(G)$ formée des mesures concentrées sur un sous-ensemble dénombrable.

3. Pour un groupe localement compact G on peut définir une structure d'algèbre dans l'espace $L^1(G, d_lg)$, où d_lg est une mesure de Haar à gauche. Le produit de convolution de deux fonctions de $L^1(G, d_lg)$ est donné par la formule

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)\, d_lh.$$

tandis que l'involution est de la forme

$$f^*(g) = \Delta_G(g)\overline{f(g^{-1})}.$$

P r o b l è m e 4. Démontrer que les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Haar forment un idéal bilatère J dans $M(G)$, et l'application

$$f \mapsto f(g)\, d_l g$$

est un isomorphisme des algèbres $L^1(G, d_l g)$ et J.

I n d i c a t i o n. Faire appel aux résultats de 9.1.

4. L'algèbre $C^*(G)$ (que l'on appelle C^*-algèbre du groupe G) se définit comme étant $C^*(L^1(G, d_l g))$ (voir 4.3). Elle s'obtient de l'algèbre $L^1(G, d_l g)$ en complétant par la norme

$$\|f\|_1 = \sup_T \|T(f)\|,$$

où la borne supérieure se calcule sur toutes les $*$-représentations de l'algèbre $L^1(G, d_l g)$ (pour ajouter ensuite l'unité si le groupe G n'est pas discret).

Considérons maintenant la liaison entre les représentations du groupe G et celles de ses algèbres de groupe. Il est évident que chaque représentation T du groupe G dans un espace vectoriel sur le corps K se prolonge à une représentation de $K[G]$, et que chaque représentation non dégénérée de K s'obtient de cette manière. Par conséquent, de même que pour les groupes finis, la catégorie $\Pi(G, K)$ est équivalente à la catégorie des $K[G]$-modules non dégénérés. Néanmoins, étant donné que la structure de $K[G]$ est bien plus compliquée, ce fait ne joue pas ici un rôle aussi important que dans le cas fini.

Si la représentation T est continue et agit dans un espace complet localement convexe, alors T peut être prolongé à une représentation de l'algèbre $M_0(G)$, en posant

$$T(\mu) = \int_G T(g)\, d\mu(g).$$

Pour la définition des intégrales opératoires voir 9.2. Nous faisons ici appel au fait que, pour un espace localement convexe V, l'espace End V des opérateurs continus dans V est localement convexe dans la topologie forte et l'application $g \mapsto T(g)$ du groupe G dans End V est continue.

Si T est une représentation uniformément bornée du groupe G dans l'espace de Banach réflexif V, alors T se prolonge à une représentation de l'algèbre $M(G)$ de la manière suivante. Si $\xi \in V$ et $\chi \in V'$, la fonction $g \mapsto \langle \chi, T(g)\xi \rangle$ est continue et bornée. Par conséquent, l'intégrale suivante existe:

$$I_\mu(\xi, \chi) = \int_G \langle \chi, T(g)\xi \rangle\, d\mu(g). \qquad (1)$$

Il est clair que $|I_\mu(\xi, \chi)| \leqslant C \cdot \|\xi\| \cdot \|\chi\| \cdot \|\mu\|$, où $C = \sup\limits_{g \in G} \|T(g)\|$. De ce fait et de la bilinéarité de $I_\mu(\xi, \chi)$, on déduit que

$$I_\mu(\xi, \chi) = \langle \chi, T(\mu)\,\xi \rangle, \tag{2}$$

où $T(\mu)$ est un opérateur linéaire dans V à norme $\leqslant C \cdot \|\mu\|$.

Problème 5. Montrer que l'application $\mu \mapsto T(\mu)$ est une représentation (dans le cas où T est unitaire, une $*$-représentation) de l'algèbre $M(G)$ dans l'espace V.

Indication. Démontrer les égalités

$$I_{\mu_1 * \mu_2}(\xi, \chi) = I_{\mu_1}(T(\mu_2)\,\xi, \chi), \quad I_{\mu^*}(\xi, \chi) = \overline{I_\mu(\chi, \xi)}.$$

Ainsi, chaque représentation unitaire du groupe G engendre, suivant les formules (1), (2), une $*$-représentation de l'algèbre $L^1(G, d_l g)$. Cette représentation se prolonge à une représentation de l'algèbre $C^*(G)$ que nous noterons toujours T. Les algèbres $L^1(G, d_l g)$ et $C^*(G)$, contrairement à $K[G]$, $l^1(G)$ et $M(G)$, ne contiennent pas le groupe G. Il est donc naturel de poser la question suivante: la représentation initiale du groupe G peut-elle être retrouvée à partir de la représentation de l'algèbre de groupe, et chaque représentation de l'algèbre de groupe correspond-elle à une représentation du groupe?

Convenons d'appeler *non dégénérée* chaque $*$-représentation de l'algèbre $L^1(G, d_l g)$ ou de l'algèbre $C^*(G)$ dans l'espace hilbertien H, telle que les vecteurs de la forme $T(f)\,\xi$, $f \in L^1(G, d_l g)$, $\xi \in H$ sont denses dans H.

Théorème 1. *La représentation T de l'algèbre $L^1(G, d_l g)$ (ou de $C^*(G)$) est engendrée par une représentation unitaire du groupe G si et seulement si elle est non dégénérée. Si cette condition est satisfaite, la représentation du groupe se définit d'une façon unique par la représentation de l'algèbre de groupe engendrée par elle.*

Démonstration. Soit T une représentation unitaire du groupe G dans l'espace H et $\xi \in H$. Vu que l'application $g \mapsto T(g)\,\xi$ est continue, il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un voisinage de l'unité U_ε tel que $\|T(g)\,\xi - \xi\| < \varepsilon$ quel que soit $g \in U_\varepsilon$. Si f est une fonction sur le groupe à support dans U_ε qui satisfait à la condition $\int\limits_G f(g)\,d_l g = 1$, alors $\|T(f)\,\xi - \xi\| < \varepsilon$, ce qui démontre que T est non dégénérée.

Supposons maintenant que T soit non dégénérée. Soit $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$ une base de voisinages du point $g \in G$. Considérons une famil-

le $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in A$ de fonctions sur G qui possèdent les propriétés:

1) $$f_\alpha(g) \geqslant 0 \text{ et } \int_G f_\alpha(g)\, d_l g = 1,$$

2) $$f_\alpha(g) = 0 \text{ en dehors de } U_\alpha.$$

Ordonnons l'ensemble A, en posant $\alpha > \beta$ si $U_\alpha \subset U_\beta$. Montrons que, pour chaque $\xi \in H$, la limite $\lim\limits_{\alpha \in A} T(f_\alpha)\xi$ existe. Vu que $\| T(f_\alpha) \| \leqslant \| f_\alpha \| = 1$, il suffit de démontrer que ceci est vrai pour un ensemble H_0 partout dense de vecteurs de la forme $\xi = T(f)\eta$, où f est une fonction continue sur G à support compact, et η un vecteur de H. De la continuité uniforme de f il découle que pour chaque $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain α, on a la relation $\| f_\alpha * f - L_g f \| < \varepsilon$. Ici désignerons par $L_g f$ la translation à gauche de la fonction f sur g^{-1}: $L_g f(g_1) = f(g^{-1}g_1)$. Par conséquent, le filet $T(f_\alpha)\xi = T(f_\alpha * f)\eta$ converge vers le vecteur $T(L_g f)\eta$. Définissons l'opérateur $T(g)$ d'abord sur H_0 par la formule

$$T(g)\,T(f)\,\eta = T(L_g f)\,\eta.$$

D'après ce que l'on vient de dire, nous avons $\| T(g) \| \leqslant 1$ et, par conséquent, l'opérateur $T(g)$ se prolonge par continuité sur tout l'espace H.

Problème 6. Démontrer que les opérateurs $T(g)$ ainsi construits *possèdent les propriétés*:

1) $$T(g_1 g_2) = T(g_1)\,T(g_2),$$

2) $$T(g^{-1}) = T(g)^*,$$

3) $$T(e) = 1.$$

Indication. Si $\{U_\alpha\}$ est une base de voisinages de g_1 et $\{V_\alpha\}$ une base de voisinages de g_2, alors $\{U_\alpha, V_\alpha\}$ est une base de voisinages de $g_1 g_2$.

Pour conclure la démonstration du théorème, il suffit de vérifier que la construction ci-dessus de la représentation d'un groupe d'après la représentation non dégénérée de l'algèbre correspondante est inverse à l'opération définie par la formule (1). Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer cette vérification.

10.3. Applications des C^*-algèbres de groupes. Si G est un groupe séparable localement compact, l'espace $L^1(G, d_l g)$ est séparable. Il en est donc de même pour l'algèbre $C^*(G)$. Ceci permet de démontrer le théorème de décomposition des représentations énoncé au 8.4.

Soit T une représentation unitaire de G dans un espace séparable $H = \int_X H_x d\mu(x)$, et supposons décomposables tous les opérateurs $T(g)$, $g \in G$. Alors les opérateurs $T(a)$, $a \in C^*(G)$ le sont aussi.

Soit $\mathfrak{A}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans $C^*(G)$. Nous pouvons évidemment considérer $\mathfrak{A}$ comme étant une algèbre sur le corps $\mathbf{Q}(i)$ des nombres rationnels complexes (en ajoutant, s'il le faut, à $\mathfrak{A}$ tous les polynômes dont les coefficients sont des expressions rationnelles des éléments de $\mathfrak{A}$).

Les opérateurs $T(a)$, $a \in \mathfrak{A}$ sont décomposables et s'écrivent sous la forme

$$[T(a)f](x) = T_x(a) f(x).$$

Chacune des relations suivantes (où a, a_1, $a_2 \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in \mathbf{Q}(i)$) est satisfaite presque partout sur X:

$$\left.\begin{aligned} T_x(a_1+a_2) &= T_x(a_1)+T_x(a_2), \\ T_x(a_1a_2) &= T_x(a_1)\,T_x(a_2), \\ T_x(\lambda a) &= \lambda T_x(a), \\ T_x(a^*) &= T_x(a)^*. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Par conséquent, en modifiant les opérateurs $T_x(a)$ sur un ensemble de mesure nulle, nous pouvons considérer que (1) est partout vérifié. Alors, l'application $a \mapsto T_x(a)$ se prolonge par continuité, pour chaque x, à une $*$-représentation T_x de l'algèbre $C^*(G)$.

P r o b l è m e 1. Démontrer que presque toutes les représentations T_x de l'algèbre $C^*(G)$ sont non dégénérées.

I n d i c a t i o n. Faire appel au fait que T est non dégénérée et que H est séparable.

Modifiant encore une fois les opérateurs $T_x(a)$ sur un ensemble de mesure nulle, nous pouvons supposer que toutes les représentations T soient non dégénérées. Alors, d'après le théorème 1 de **10.2**, elles sont engendrées par des représentations unitaires que nous désignerons également par T_x du groupe G dans H_x.

P r o b l è m e 2. Démontrer que la représentation T du groupe G est la somme continue des représentations T_x pour la mesure μ sur X.

I n d i c a t i o n. Il suffit de vérifier l'égalité $[T(g)f](x) = T_x(g)f(x)$ pour les vecteurs f de la forme $f = T(a)f_1$, où $a \in \mathfrak{A}$.

Pour les groupes non séparables, la décomposabilité d'une représentation en somme continue et sur celle de chacun des opérateurs de représentation ne sont probablement pas équivalentes.

Néanmoins, pour les groupes localement compacts quelconques, nous avons le

T h é o r è m e 1 (G e l f a n d - R a ï k o v). *Chaque représentation unitaire T d'un groupe localement compact G peut être décomposée en somme continue de représentations irréductibles.*

D é m o n s t r a t i o n. Sans nuire à la généralité, on peut supposer la représentation T cyclique. Soit ξ sa source. Alors, ξ sera

également la source de la représentation correspondante de l'algèbre $C^*(G)$. Posons $\varphi_\xi(a) = (T(a)\xi, \xi)$. C'est une forme positive sur $C^*(G)$. L'ensemble de toutes les formes positives sur $C^*(G)$ qui satisfont à la condition $\varphi(1) = \|\xi\|^2$ est un ensemble compact convexe K dans $C^*(G)'$. D'après le théorème de Choquet (voir **4.1**), la forme φ_ξ s'écrit de la manière suivante

$$\varphi_\xi(a) = \int_X \varphi_x(a)\, d\mu(x),$$

où X est l'ensemble des points extrêmes du compact K et μ est une mesure borélienne sur X. Soient T_x la représentation de $C^*(G)$ qui correspond à la forme φ_x et H_x l'espace de la représentation T_x.

Problème 3. Démontrer que la représentation T de l'algèbre $C^*(G)$ est la somme continue des représentations T_x pour la mesure μ.

Indication. Soit ξ_x la source dans H_x. L'isomorphisme cherché entre l'espace H de la représentation T et $\int_X H_x\, d\mu(x)$ fait correspondre au vecteur $T(a)\xi \in H$ la fonction vectorielle $\xi(x) = T_x(a)\xi_x$ (où ξ_x est la source dans H_x).

Chacune des formes φ_x correspond à une représentation non dégénérée de $C^*(G)$ ou bien s'écrit $\varphi_0(\lambda\cdot 1 + a) = \lambda\|\xi\|^2$, où a appartient à l'adhérence de $L^1(G, d_lg)$ dans $C^*(G)$. Il est aisé de voir que le point φ_0 possède une mesure nulle μ (autrement la représentation T de l'algèbre $C^*(G)$ serait dégénérée).

D'après le théorème 1 de **10.2**, la représentation T_x de l'algèbre $C^*(G)$ est engendrée par une certaine représentation (que nous désignerons également par T_x) du groupe G.

Problème 4. Démontrer que la représentation T du groupe G est la somme continue de représentations T_x pour la mesure μ.

Indication. Il suffit de vérifier l'égalité $[T(g)f](x) = T_x(g)f(x)$ sur sous-ensemble dense de H composé de vecteurs de la forme $T(a)f$, où a est une fonction continue sur G à support compact.

Passons maintenant aux applications qui se rapportent à la topologie de l'ensemble $\hat{G}$. Pour chaque C^*-algèbre $\mathfrak{A}$, on peut introduire une topologie dans l'ensemble $\hat{\mathfrak{A}}$ des classes d'équivalence des $*$-représentations irréductibles de $\mathfrak{A}$.

Deux méthodes ci-dessous pour introduire une topologie dans $\hat{\mathfrak{A}}$ sont tout à fait analogues à celles, décrites au § 7, pour l'introduire dans l'espace $\hat{G}$. Selon la première méthode, on se donne un voisinage du point $[T] \in \mathfrak{A}$ en fixant un nombre $\varepsilon > 0$, une famille finie de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de l'espace de la représentation T et une famille finie $a_1, \ldots, a_m$ d'éléments de $\mathfrak{A}$. Ce voisinage

se compose alors des classes d'équivalence des représentations S dont les espaces contiennent des vecteurs $\eta_1, \ldots, \eta_n$ tels que

$$|(T(a_i)\xi_k, \xi_l) - (S(a_i)\eta_k, \eta_l)| < \varepsilon,$$

quels que soient $i \in [1, m]$, $k \in [1, n]$, $l \in [1, n]$.

La deuxième méthode est basée sur la notion de représentation « faiblement contenue ». Faisons correspondre à chaque représentation T (y compris une représentation réductible) de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans l'espace H le sous-espace fermé $V(T) \subset \mathfrak{A}'$ engendré par les formes $a \mapsto (T(a)\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in H$. Nous dirons que la représentation T est *faiblement contenue* dans la famille des représentations $\mathscr{S}$, si $V(T)$ est contenu dans l'adhérence du sous-espace engendré par tous les $V(S)$, $S \in \mathscr{S}$. Le point $[T] \in \hat{\mathfrak{A}}$ appartient à l'adhérence de l'ensemble $X \subset \hat{\mathfrak{A}}$, si la représentation T est faiblement contenue dans la famille de toutes les représentations, dont les classes appartiennent à X.

Notons qu'une définition équivalente s'obtient en remplaçant l'espace $V(T)$ par le cône $V_+(T)$ des formes positives contenues dans $V(T)$.

La troisième définition est basée sur le fait que l'on peut introduire dans l'ensemble de tous les idéaux bilatères simples d'une algèbre quelconque la topologie dite *de Jacobson*. L'adhérence d'un ensemble d'idéaux M dans cette topologie comprend tous les idéaux J qui contiennent l'idéal $J_M = \bigcap_{J \in M} J$.

Rappelons que l'idéal J s'appelle *simple*, si la relation $J \supset J_1 J_2$ entraîne $J \supset J_1$ ou $J \supset J_2$. Si $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre et T sa représentation irréductible, le noyau de cette dernière est un idéal bilatère simple de $\mathfrak{A}$.

Il se trouve que toutes les trois méthodes munissent l'ensemble $\hat{\mathfrak{A}}$ de topologies équivalentes. Dans le cas où $\mathfrak{A} = C^*(G)$ et G n'est pas discret, l'ensemble $\hat{\mathfrak{A}}$ s'identifie naturellement avec $\hat{G} \cup [T_0]$, où T_0 est la représentation dégénérée de $C^*(G)$ qui annule $L^1(G, d_l g)$ (voir **10.2**, théorème 1).

Cette identification donne un homéomorphisme de l'ensemble de toutes les représentations non dégénérées de $\mathfrak{A}$ sur l'ensemble G.

Pour la démonstration de toutes les assertions citées ci-dessus voir le livre [15].

10.4. Algèbres de groupe des groupes de Lie. Si G est un groupe de Lie dans l'algèbre $L^1(G, d_l g)$, on peut définir de diverses sous-algèbres en imposant sur les fonctions f les conditions de différentiabilité (jusqu'à l'analyticité) et de décroissance rapide à l'infini (jusqu'à la condition de finitude). Si le groupe G est compact, la plus petite de ces algèbres existe elle est, engendrée par les éléments matriciaux des représentations irréductibles. Pour les groupes non

compacts, on emploie le plus souvent l'algèbre $C_0^\infty(G)$ des fonctions finies infiniment différentiables.

D'autre part, on peut pour un groupe de Lie quelconque, définir une algèbre plus large que $M_0(G)$. Soit $C^\infty(G)$ l'espace de toutes les fonctions infiniment différentiables sur G, avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On sait que $C^\infty(G)$ est un espace nucléaire dénombrablement normé et que le produit tensoriel topologique $C^\infty(G) \hat{\otimes} C^\infty(G)$ s'identifie naturellement avec $C^\infty(G \times G)$. L'espace $R(G)$, dual à $C^\infty(G)$, consiste en fonctions généralisées à support compact.

Pour chaque $\chi \in R(G)$, il existe un compact minimal K possédant la propriété $\langle \chi, \varphi \rangle = 0$ pour toutes les $\varphi \in C^\infty(G)$ nulles, avec toutes leurs dérivées, sur K. Ce compact K s'appelle support de χ et s'écrit supp χ. L'espace $M_0(G)$ est inclus dans $R(G)$: à chaque mesure μ correspond la forme $\varphi \mapsto \int_G \varphi(g)\, d\mu(g)$.

Problème 1. Vérifier que le symbole supp μ désigne toujours un même ensemble, si l'on considère μ comme élément de $M_0(G)$ ou de $R(G)$.

Définissons maintenant le *produit de convolution* dans $R(G)$ en posant $\langle \chi_1 * \chi_2, \varphi \rangle = \langle \chi_1, \psi \rangle$, où $\psi(g) = \langle \chi_2, L_g^{-1}\varphi \rangle$, et l'opérateur L_g est de la forme $[L_g\varphi](g_1) = \varphi(g^{-1}g_1)$.

Problème 2. Démontrer que sur le sous-espace $M_0(G) \subset R(G)$ le produit de convolution coïncide avec celui introduit dans **10.2**.

Problème 3. Démontrer la relation

$$\text{supp}\,(\chi_1 * \chi_2) \subset \text{supp}\ \chi_1 \cdot \text{supp}\ \chi_2.$$

Indication. Si la fonction φ s'annule avec toutes ses dérivées sur l'ensemble supp $\chi_1 \cdot$supp χ_2, la fonction $\psi(g) = \langle \chi_2, L_g\varphi \rangle$ s'annule avec toutes ses dérivées sur l'ensemble supp χ_1.

Comme corollaire de cette assertion, citons le fait que l'ensemble $R(G, K)$ des fonctions généralisées sur G à supports compacts appartenant au sous-groupe K est une sous-algèbre de $R(G)$. La structure des algèbres $R(G, K)$ n'est pas encore suffisamment étudiée, excepté le cas $K = \{e\}$ (voir plus loin).

Le cas où G est un groupe de Lie semi-simple et K son sous-groupe compact maximal est d'un intérêt particulier. De nombreux résultats importants obtenus ces dernières années dans la théorie des représentations des groupes semi-simples sont intimement liés à la structure algébrique de l'algèbre $R(G, K)$.

L'algèbre $R(G, \{e\})$ est entièrement définie par un voisinage infiniment petit de l'unité du groupe G. Par conséquent, elle se retrouve à partir de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de ce groupe (voir § 6).

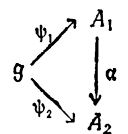
Désignons par $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre dite *enveloppante* de l'algèbre $\mathfrak{g}$. Par définition, $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ (voir 3.5) par l'idéal bilatère J, engendré par les éléments de la forme

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

P r o b l è m e 4. Démontrer que l'inclusion naturelle $\varphi: \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ est un objet universel dans la catégorie de toutes les applications ψ des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ dans les algèbres associatives qui possèdent la propriété

$$\psi([X, Y]) = \psi(X)\psi(Y) - \psi(Y)\psi(X). \tag{2}$$

(Les morphismes de cette catégorie sont les diagrammes commutatifs de la forme



où α est un homomorphisme de A_1 dans A_2.)

T h é o r è m e 1 (L. S c h w a r t z). *Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G. L'algèbre $R(G, \{e\})$ est alors isomorphe à $U(\mathfrak{g})$.*

D é m o n s t r a t i o n. Réalisons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par des champs de vecteurs invariants à gauche sur G et considérons l'application $\psi: \mathfrak{g} \to R(G)$ donnée par la formule

$$\langle \psi(X), f \rangle = (Xf)(e). \tag{3}$$

Il est clair que $\psi(X)$ appartient à $R(G, \{e\})$.

P r o b l è m e 5. Démontrer que l'application ψ possède la propriété (2) du problème 4.

I n d i c a t i o n. Vérifier que $\langle \psi(X) * \psi(Y), f \rangle = (XYf)(e)$, pour recourir ensuite à la quatrième définition du commutateur $[X, Y]$ donnée dans 6.3.

D'après le problème 4, il existe un homomorphisme $\bar{\psi}$ de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ dans $R(G, \{e\})$, qui prolonge l'application ψ. Il est aisé de vérifier que cet homomorphisme $\bar{\psi}$ envoie l'élément $X_1 \otimes \ldots \otimes X_n \bmod J \in U(\mathfrak{g})$ dans la fonction généralisée

$$f \mapsto (X_1 \ldots X_n f)(e).$$

Démontrons que $\bar{\psi}$ est un isomorphisme. Pour cela, introduisons une filtration dans $U(\mathfrak{g})$ et $R(G, \{e\})$ et montrons que $\bar{\psi}$ ne modifie pas cette filtration et engendre un isomorphisme des algèbres graduées correspondantes $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ et $\operatorname{gr} R(G, \{e\})$. De ce fait il est aisé de déduire que $\ker \bar{\psi} = 0$ et $\operatorname{im} \bar{\psi} = R(G, \{e\})$, c'est-à-dire que $\bar{\psi}$ est un isomorphisme.

La filtration dans $U(\mathfrak{g})$ s'obtient à partir de la graduation dans $T(\mathfrak{g})$:

$$U_k(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{l=0}^{k} T^l(\mathfrak{g}) \bmod J.$$

Problème 6. Démontrer que l'algèbre gr $U(\mathfrak{g})$ est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ (voir 3.5).

La filtration dans $R(G, \{e\})$ se définit de la manière suivante. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une base dans $\mathfrak{g}$. Prenons dans le voisinage de l'unité du groupe G un système de coordonnées canoniques correspondantes (voir 6.4): le point $\exp(x_1X_1 + \ldots + x_nX_n)$ a $x_1, \ldots, x_n$ pour coordonnées.

Chaque élément $\chi \in R(G, \{e\})$ est de la forme

$$f \mapsto \sum c_{k_1, \ldots, k_n} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}(0) \tag{4}$$

(la somme est finie). Désignons par $R_k(G, \{e\})$ le sous-espace de $R(G, \{e\})$ composé de tous les éléments χ, dont les coefficients $c_{k_1, \ldots, k_n}$ dans la formule (4) sont nuls, pour $k_1 + \ldots + k_n > k$.

Problème 7. Démontrer que $\{R_k(G, \{e\})\}$ est une filtration dans $R(G, \{e\})$ et que l'algèbre gr $R(G, \{e\})$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{C}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]$.

Indication. Faire correspondre à chaque élément $\chi \in R_k(G, \{e\})$ de la forme (4) l'expression

$$[\chi] = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} c_{k_1, \ldots, k_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Démontrer que $[\chi_1 * \chi_2] = [\chi_1][\chi_2]$.

La filtration dans $U(\mathfrak{g})$ et $R(G, \{e\})$ possède la propriété $\overline{\psi}(U_k(\mathfrak{g})) \subset R_k(G, \{e\})$. En effet, pour $k = 1$ cette propriété est évidente, et pour les autres k elle découle du fait que $\overline{\psi}$ est un homomorphisme. Par conséquent, $\overline{\psi}$ engendre un homomorphisme gr $\overline{\psi}$: gr $U(\mathfrak{g}) \to$ gr $R(G, \{e\})$. De la définition du système de coordonnées canoniques, il s'ensuit que

$$\overline{\psi}(X_k): f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(0).$$

Par conséquent, gr $\overline{\psi}(X_k) = \partial/\partial x_k$, et donc gr $\overline{\psi}$ est un isomorphisme. Le théorème est démontré.

La structure algébrique de $U(\mathfrak{g})$ joue un rôle important dans la théorie des représentations du groupe correspondant.

Une précision importante au sujet de cette structure s'obtient en comparant $U(\mathfrak{g})$ à l'algèbre commutative $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Pour chaque sous-espace $L \subset U(\mathfrak{g})$, désignons par $\operatorname{gr} L$ le sous-espace dans $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$, engendré par les éléments de la forme $\operatorname{gr}^k X$, $X \in L \cap U_k(\mathfrak{g})$ (voir 3.1).

Il est clair que si L est une sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$, $\operatorname{gr} L$ est une sous-algèbre de $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$.

Nous appliquerons cette méthode pour décrire le centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$.

Prolongeons la représentation adjointe Ad du groupe G dans $\mathfrak{g}$ (voir 6.3) à une représentation $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ dans l'espace $U(\mathfrak{g})$. [Cette extension se définit d'une façon unique par la condition que $\widetilde{\mathrm{Ad}}\ g$ est un automorphisme de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$.]

Théorème 2 (I. Gelfand). *Soit G un groupe de Lie connexe. Le sous-espace $\operatorname{gr} Z(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ coïncide alors avec le sous-espace des éléments G-invariants de $S(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Considérons l'application linéaire σ: $S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ que l'on appelle symétrisation, et qui envoie $X_1, \ldots, X_k \in S^k(\mathfrak{g})$ dans

$$\frac{1}{k!} \sum_s X_{s(1)} \ldots X_{s(k)} \in U(\mathfrak{g})$$

(la somme se calcule sur toutes les permutations s des indices $1, 2, \ldots, k$).

L'assertion du théorème sera déduite du fait suivant qui a également d'autres applications importantes.

Problème 8. L'application σ est permutable à l'action du groupe G et définit un isomorphisme des espaces linéaires $S(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{g})$.

Indication. L'espace $S(\mathfrak{g})$ est engendré par les éléments de la forme X^k, $X \in \mathfrak{g}$. La deuxième assertion se déduit du problème 6.

Montrons maintenant que pour chaque groupe de Lie connexe l'ensemble des éléments G-invariants de $U(\mathfrak{g})$ coïncide avec $Z(\mathfrak{g})$. En effet, puisque G est engendré par un voisinage quelconque de l'unité, pour qu'un élément soit G-invariant, il suffit qu'il soit invariant par rapport aux sous-groupes $\exp tX$, $X \in \mathfrak{g}$ de dimension 1. Mais ceci équivaut à annuler cet élément par tous les opérateurs de la représentation correspondante de l'algèbre de Lie.

Problème 9. La représentation $\widetilde{\mathrm{ad}}$ de l'algèbre $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$ qui correspond à la représentation $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ du groupe G est de la forme

$$\widetilde{\mathrm{ad}}\, X : Y \mapsto XY - YX,\ X \in \mathfrak{g},\ Y \in U(\mathfrak{g}). \tag{5}$$

I n d i c a t i o n. Recourir au fait que $\widetilde{\mathrm{ad}}\, X$ est une différentiation de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$.

La condition $(\widetilde{\mathrm{ad}}\, X)\, Y = 0$ pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ équivaut manifestement à $Y \in Z(\mathfrak{g})$.

Le théorème de Gelfand découle maintenant des problèmes 8, 9 et de l'identité

$$\mathrm{gr}^k\, (\sigma(X)) = X \quad \text{pour } X \in S^k(\mathfrak{g})$$

facile à vérifier.

Le corps des quotients $D(\mathfrak{g})$ de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ (que l'on appelle corps de Lie) est un objet très intéressant et peu étudié. L'algèbre $U(\mathfrak{g})$ étant non commutative, la définition même de $D(\mathfrak{g})$ n'est pas évidente.

Pour énoncer cette définition il faut établir certains faits préliminaires.

P r o b l è m e 10. Démontrer que l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ n'a pas de diviseurs de zéro : si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, alors $XY \neq 0$.

I n d i c a t i o n. Recourir à la propriété analogue de l'algèbre $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$.

P r o b l è m e 11. Chaque suite strictement croissante d'idéaux à gauche (à droite) de $U(\mathfrak{g})$ est finie.

I n d i c a t i o n. Démontrer que pour chaque idéal $J \subset U(\mathfrak{g})$ l'ensemble $\mathrm{gr}\, J$ est un idéal dans $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$. L'algèbre $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes de $n = \dim \mathfrak{g}$ variables ; pour elle, comme on le sait bien, chaque suite strictement croissante d'idéaux est de longueur finie.

P r o b l è m e 12. Deux éléments quelconques $X \neq 0$, $Y \neq 0$ de $U(\mathfrak{g})$ possèdent un multiple commun non nul à gauche (à droite).

I n d i c a t i o n. Considérer la suite $\{J_k\}$, où J_k est l'idéal à gauche engendré par les éléments $X, XY, \ldots, XY^k$, pour recourir ensuite aux problèmes 10 et 11.

Nous pouvons maintenant définir le corps de Lie $D(\mathfrak{g})$. Considérons l'ensemble de toutes les expressions de la forme XY^{-1} et $Y^{-1}X$, où $X, Y \in U(\mathfrak{g})$ et $Y \neq 0$. Nous les appellerons respectivement fraction à gauche et fraction à droite. Nous dirons que la fraction à gauche $Y_1^{-1}X_1$ est équivalente à la fraction à droite $X_2Y_2^{-1}$, si $X_1Y_2 = Y_1X_2$. Deux fractions à gauche (à droite) s'appellent équivalentes, si elles sont équivalentes à une même fraction à droite (à gauche).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la relation introduite est symétrique, réflexive et transitive.

Définissons le *corps de Lie* $D(\mathfrak{g})$ comme l'ensemble des classes des fractions équivalentes. Il découle de l'énoncé du problème 12 que chacune de ces classes possède des fractions à droite et à gauche.

Les opérations dans $D(\mathfrak{g})$ se définissent de la manière suivante.

Soient $X_1Y_1^{-1}$ et $X_2Y_2^{-1}$ les représentants des classes a_1 et a_2 de $D(G)$. Les éléments Y_1 et Y_2 possèdent un multiple commun non

nul: $Z = Y_1Z_1 = Y_2Z_2$. Il est évident que la fraction $X_1Y_1^{-1}$ est équivalente à $X_1Z_1Z^{-1}$, tandis que la fraction $X_2Y_2^{-1}$ est équivalente à $X_2Z_2Z^{-1}$. Définissons la somme $a_1 + a_2$ comme la classe d'équivalence de la fraction $(X_1Z_1 + X_2Z_2)\,Z^{-1}$, et le rapport $a_1a_2^{-1}$ comme la classe d'équivalence de la fraction $X_1Z_1\,(X_2Z_2)^{-1}$. Les autres opérations arithmétiques s'expriment en fonction des opérations déjà définies: $a_1a_2 = a_1\,(a_2^{-1})^{-1}$, $a_1 - a_2 = a_1 + (-1)\,a_2$.

Il est facile de vérifier que ces opérations sont bien définies, cette vérification est donc laissée au lecteur.

Il existe une hypothèse, selon laquelle, *pour chaque groupe algébrique G, le corps D* ($\mathfrak{g}$) *est isomorphe au corps des quotients* $D_{n,\,k}$ *de l'algèbre* $R_{n,\,k}$, décrite dans **3.5**. Ceci signifie que les générateurs de l'algèbre $\mathfrak{g}$ sont liés par une transformation bijective birationnelle aux générateurs canoniques $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_k$ de l'algèbre $R_{n,\,k}$. Les nombres n et k admettent une interprétation très simple dans le langage de la théorie des représentations: la représentation irréductible typique du groupe G dépend de k paramètres et se réalise dans un espace de fonctions de n variables.

Pour la démonstration de l'hypothèse énoncée ci-dessus dans certains cas particuliers, et d'autres renseignements sur les corps de Lie voir les articles de I. Gelfand et de l'auteur [81], [82].

10.5. Représentations de groupes de Lie et de leurs algèbres de groupe. Chaque représentation T d'un groupe de Lie G dans un espace complet localement convexe V se prolonge à une représentation de l'algèbre $M_0\,(G)$.

Si V est un espace de Banach et T une représentation localement bornée (c'est-à-dire que les normes des opérateurs $T\,(g)$ sont bornées sur chaque compact de G), alors la représentation du groupe G se retrouve d'une façon unique à partir de la représentation de la sous-algèbre $C_0^\infty\,(G) \subset M_0\,(G)$. Ces assertions s'obtiennent aisément du théorème 1 du numéro 2 et de sa démonstration.

Si la représentation T est de dimension finie, alors l'application $g \mapsto T\,(g)$ est une fonction analytique opératoire sur G (voir **6.4**). Par conséquent, la représentation T peut être prolongée à une représentation de l'algèbre $R\,(G)$ par la formule

$$\langle \eta,\ T\,(\chi)\,\xi\rangle = \langle \chi,\ t_{\xi,\,\eta}\rangle, \qquad (1)$$

où $t_{\xi,\,\eta}\,(g) = \langle \eta,\ T\,(g)\,\xi\rangle$ est l'élément matriciel de la représentation T, correspondant aux vecteurs $\xi \in V$ et $\eta \in V^*$.

Pour les représentations de dimension infinie, la situation n'est pas si simple. Les éléments matriciaux de ces représentations sont continus (d'après la définition de la représentation), mais ne sont pas nécessairement différentiables. Par exemple. pour une représentation régulière T du groupe $\mathbf{R}$ agissant dans l'espace $L^2\,(\mathbf{R},\,dx)$

suivant la formule

$$[T(s)\,\xi](x) = \xi(x+s),$$

l'élément matriciel $t_{\xi,\,\eta}$ est de la forme

$$t_{\xi,\,\eta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x+s)\,\overline{\eta(x)}\,dx,$$

où ξ, η sont des fonctions quelconques de $L^2(\mathbf{R}, dx)$.

Problème 1. Démontrer que $t_{\xi,\,\eta}$ peut être une fonction finie continue linéaire par morceaux quelconque.

Indication. Considérer le cas de fonctions ξ et η constantes par morceaux et finies.

Cet exemple montre que l'opérateur $T(\chi)$ peut se définir par la formule (1) dans l'espace plus étroit formé des vecteurs dont les éléments matriciaux correspondants appartiennent à $C^\infty(G)$.

On appelle *espace de Görding* de la représentation T du groupe de Lie G, agissant dans un espace complet localement convexe V, le sous-espace $V^\infty \subset V$ qui consiste en tous les vecteurs $\xi \in V$ tels que l'élément matriciel $t_{\xi,\,\eta}(g) = \langle \eta, T(g)\,\xi\rangle$ appartient à $C^\infty(G)$ quel que soit $\eta \in V'$.

Problème 2. Démontrer que l'espace de Görding est isomorphe à $\mathrm{Hom}_G(V', C^\infty(G))$, si l'on définit l'action de G dans V' conformément à la représentation T' conjuguée à T, et dans $C^\infty(G)$ à l'aide de translations à gauche $L(g)$.

Indication. A chaque $\xi \in V^\infty$ correspond une application $\eta \mapsto t_{\xi,\,\eta}$ de l'espace V' dans $C^\infty(G)$.

Vu que l'espace $C^\infty(G)$ est nucléaire, on peut identifier $\mathrm{Hom}(V', C^\infty(G))$ avec le produit tensoriel topologique $V \hat{\otimes} C^\infty(G)$ et l'espace $\mathrm{Hom}_G(V', C^\infty(G))$ avec $V \underset{G}{\hat{\otimes}} C^\infty(G)$. On peut donc considérer l'espace de Görding V^∞ comme sous-espace des éléments G-invariants de l'espace $V \hat{\otimes} C^\infty(G)$ des fonctions infiniment différentiables sur G à valeurs dans V. Définissons dans V^∞ la *topologie* induite de $V \hat{\otimes} C^\infty(G)$. Autrement dit, nous supposerons que le filet (cf. 1.1) ξ_α converge à ξ, si le filet des fonctions vectorielles $g \mapsto T(g)\,\xi_\alpha$ converge avec toutes ses dérivées à la fonction vectorielle $g \mapsto T(g)\,\xi$ uniformément sur chaque compact de G.

Chaque représentation T du groupe de Lie G dans un espace localement convexe complet V engendre une représentation de l'algèbre $R(G)$ dans l'espace de Görding V^∞ d'après la formule (1). Désignons

cette représentation par T^∞. Sa restriction sur $R(G, \{e\}) = U(\mathfrak{g})$ est une représentation de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$.

Dans l'exemple ci-dessus, l'espace de Görding consiste en toutes les fonctions infiniment différentiables sur la droite numérique, dont toutes les dérivées appartiennent à $L^2(\mathbf{R}, dx)$.

Théorème 1 (Gelfand-Görding). *Pour chaque représentation T du groupe de Lie G dans un espace complet localement convexe V, l'espace de Görding V^∞ est dense dans V.*

La démonstration est fondée sur la technique très utile et souvent employée *de lissage*. Nous appellerons *opérateur de lissage* dans l'espace V chaque opérateur de la forme

$$T(\varphi) = \int_G \varphi(g) T(g)\, d_r g,$$

où $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\varphi \geqslant 0$ et $\int_G \varphi(g)\, d_r g = 1$.

Montrons que chaque opérateur de lissage envoie l'espace V dans V^∞. Ceci découle du fait suivant ayant de nombreuses applications.

Problème 3. Soit ψ une fonction généralisée sur le groupe G (c'est-à-dire une forme linéaire continue sur l'espace C_0^∞), et $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Alors, la fonction

$$\psi * \varphi(g) = \langle \psi, L(g^{-1})\varphi\rangle$$

appartient à $C^\infty(G)$.

Indication. Démontrer l'égalité

$$L(g)(\psi * \varphi) = \psi * L(g)\varphi, \tag{2}$$

où $[L(g)\varphi](g_1) = \varphi(g_1 g)$, et en déduire que la fonction étudiée $\psi*\varphi$ est différentiable et que sa dérivée par le champ X invariant à gauche est donnée par l'égalité $X(\psi*\varphi) = \psi * X\varphi$ (voir 6.3, problème 5).

Pour achever la démonstration du théorème 1, il suffit de remarquer que l'ensemble des vecteurs « lissés » de la forme $T(\varphi)\xi$ est dense dans V. En effet, si U est un voisinage convexe quelconque du point ξ dans V, alors la continuité de T entraîne $T(g)\xi \in U$ pour chaque g d'un certain voisinage W de l'unité du groupe G. Alors, $T(\varphi)\xi \in U$, si φ est nulle en dehors de W, $\varphi \geqslant 0$ et $\int_G \varphi(g)\, d_r g = 1$; le théorème est démontré.

Corollaire. *Si V est de dimension finie, alors $(V^\infty) = V$.*

Problème 4. Démontrer que $(V^\infty)^\infty = V^\infty$.

Indication. Faire appel à l'isomorphisme

$$C^\infty(G) \hat{\otimes} C^\infty(G) \approx C^\infty(G \times G)$$

et à celui qui s'en déduit

$$C^\infty(G) \hat{\underset{G}{\otimes}} C^\infty(G) \approx C^\infty(G).$$

P r o b l è m e 5. Soient T_1 et T_2 deux représentations du groupe G dans les espaces complets localement convexes V_1 et V_2. Démontrer que $A \in \mathscr{C}(T_1, T_2)$ entraîne $A V_1^\infty \subset V_2^\infty$.

I n d i c a t i o n. Recourir à la relation $t^{(2)}_{A\xi, \eta} = t^{(1)}_{\xi, A'\eta}$ pour $\xi \in V_1$; $\eta \in V_2'$.

Il est à remarquer que le théorème 1 peut être déduit du problème 5 et du fait que $C_0^\infty(G)$ est contenu dans l'espace de Görding de la représentation régulière à gauche de G.

Il est parfois ulite de considérer l'espace plus étroit V^ω des *vecteurs analytiques* de l'espace V, au lieu de l'espace de Görding V^∞.

Par définition, un vecteur $\xi \in V$ appartient à V^ω, si la fonction vectorielle $g \mapsto T(g)\xi$ est analytique sur G. Pour les représentations dans les espaces de Banach, on peut démontrer que V^ω est dense dans V. La démonstration, comme dans le cas de l'espace de Görding, est basée sur la technique des opérateurs de lissage $T(\varphi)$, où φ est une fonction analytique sur G, « presque concentrée » dans un petit voisinage de l'unité. L'existence de telles fonctions peut être démontrée en faisant appel à la théorie des équations paraboliques (en considérant la solution fondamentale de l'équation de chaleur sur le groupe G).

La représentation T d'un groupe connexe G se retrouve d'une façon unique d'après la représentation T^ω de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'espace V^ω. En effet, en se servant de la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on retrouve la représentation de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. Connaissant cette dernière représentation, on peut calculer toutes les dérivées de la fonction analytique $g \mapsto T(g)\xi$ au point e et, par conséquent, retrouver cette fonction. La représentation ainsi obtenue de G dans V^ω se prolonge par continuité à la représentation cherchée T dans l'espace V.

Supposons maintenant donnée une représentation T^0 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G dans un sous-espace dense $V^0 \subset V$. Il est naturel de se demander s'il existe une représentation T du groupe G dans l'espace V telle que $V^0 \subset V^\infty(T)$ et T^0 coïncide avec la restriction de T^∞ à V^0.

Cette question est déjà non triviale pour $G = \mathbf{R}$. La réponse dans ce cas (pour un espace de Banach V) est fournie par le théorème bien connu de I. Gelfand sur la structure d'un opérateur pour un groupe fortement continu à un paramètre. Récemment, S. Krein et A. Chikhvatov ont généralisé ce résultat aux groupes de Lie quelconques. Citons ici la formulation définitive en termes qui nous seront utiles par la suite.

Théorème 2. *La représentation T^0 de l'algèbre $\mathfrak{g}$ dans un sous-espace dense V^0 d'un espace de Banach V est de la forme $T^\infty \mid_{V^0}$ pour une certaine représentation T correspondant au groupe local de Lie G et laissant V^0 invariant, si et seulement si nous avons les conditions :*

1) *chacun des opérateurs $T^0(X)$, $X \in \mathfrak{g}$ admet une fermeture ;*

2) *il existe des constantes positives C et ε, telles que les résolvantes de tous les opérateurs $T^0(X)$, où X parcourt le voisinage borné de 0 dans $\mathfrak{g}$, sont définies en dehors de la bande $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \varepsilon$ et satisfont à la condition*

$$\| R_\lambda (T^0(X))^n \| \leqslant \frac{C}{\| Re\,\lambda | - \varepsilon |^n}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$;

3) *l'espace V^0 est invariant par rapport aux résolvantes $R_\lambda(T^0(X))$, $X \in \mathfrak{g}$.*

Les deux premières conditions de ce théorème sont les généralisations naturelles des conditions de Gelfand, auxquelles doit satisfaire le générateur A d'un groupe d'opérateurs à un paramètre.

Il est à remarquer que si l'on prend pour V^0 l'intersection des domaines de définition des fermetures des opérateurs A^n, la troisième condition dans le cas de dimension 1 est automatiquement satisfaite.

Pour le cas où V est un espace hilbertien et T une représentation unitaire, il existe un résultat plus précis.

Théorème 3 (E. Nelson). *Pour que la représentation T^0 de l'algèbre $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie connexe simplement connexe G définie sur un sous-espace dense H^0 de l'espace hilbertien H soit engendrée par une représentation unitaire T du groupe G dans l'espace H, il faut et il suffit que les opérateurs*

$$iT^0(X_1), \ldots, iT^0(X_n) \text{ et } \Delta = \sum_{k=1}^{n} [T^0(X_k)]^2,$$

où $X_1, \ldots, X_n$ est une base de $\mathfrak{g}$, admettent des fermetures hermitiennes.

Pour la démonstration de ce théorème et de nombreux exemples intéressants voir l'article de E. Nelson [123].

§ 11. CARACTÈRES

11.1. Caractères des représentations de dimension finie. On appelle *caractère* d'une représentation T de dimension finie du groupe G la fonction

$$\chi_T(g) = \operatorname{tr} T(g).$$

De cette définition et des propriétés de la trace d'un opérateur (voir **3.3**), on peut déduire que la fonction χ_T est constante sur chaque classe d'éléments conjugués de G et ne dépend que de la classe d'équivalence de la représentation T. Si T_1 est une sous-représentation de T, et T_2 la représentation quotient correspondante, alors $\chi_T = \chi_{T_1} + \chi_{T_2}$. D'autre part, comme il est aisé de vérifier (cf. **3.3**), on a l'égalité

$$\chi_{T_1 \otimes T_2} = \chi_{T_1} \chi_{T_2}.$$

Ainsi, l'application $T \mapsto \chi_T$ définit un homomorphisme de l'anneau de Grothendieck $\Gamma(G)$ (voir **7.1**) dans l'anneau des fonctions sur G, constantes sur les classes d'éléments conjugués.

Théorème 1. *Une représentation irréductible T du groupe G dans un espace vectoriel de dimension finie est définie à une équivalence près par son caractère χ_T.*

Démonstration. Considérons l'espace $V(T)$ des fonctions sur G engendré par les éléments matriciaux de la représentation T. Il est évident que la représentation S du groupe G dans l'espace $V(T)$ par translations à gauche est la somme de $n = \dim T$ représentations irréductibles, équivalentes à T. D'après le théorème de Jordan-Gölder (voir **8.1**), chaque sous-représentation irréductible S est équivalente à T. Donc, pour retrouver T, il suffit de choisir un sous-espace irréductible quelconque dans l'espace V engendré par les translations de la fonction χ_T. (On peut montrer qu'en fait V coïncide avec $V(T)$, mais pour notre démonstration, il suffit de l'inclusion évidente $V \subset V(T)$.) Le théorème est démontré.

Pour les représentations unitaires des groupes compacts, on a le

Théorème 2. *Les caractères des représentations unitaires irréductibles d'un groupe compact G forment une base orthonormée dans l'espace $H \subset L^2(G, dg)$ composé des fonctions constantes sur les traces d'éléments conjugués dans G.*

Démonstration. Les relations

$$(\chi_{T_1}, \chi_{T_2}) = 0 \text{ pour } T_1 \text{ et } T_2 \text{ non équivalents} \tag{1}$$

et

$$(\chi_T, \chi_T) = 1 \tag{2}$$

découlent immédiatement des relations d'orthogonalité démontrées au **9.2**. Il reste à vérifier que si $f \in H$ et $(f, \chi_T) = 0$ pour toutes les représentations irréductibles T, alors $f = 0$.

Problème 1. Si $f \in H$, alors pour chaque représentation irréductible T nous avons l'égalité $T(f) = \dfrac{(f, \chi_T)}{\dim T} \cdot 1$.

Indication. Démontrer que $T(f) \in \mathscr{C}(T)$ et que $\operatorname{tr} T(f) = (f, \chi_T)$.

Par conséquent, si $f \in H'$ et $(f, \chi_T) = 0$ pour toutes les représentations irréductibles T, les opérateurs $T(f)$ s'annulent pour toutes les représentations unitaires T, puisque chaque représentation unitaire est la somme continue de représentations irréductibles [1]). Appliquant cette assertion à la représentation régulière de G dans $L^2(G, dg)$, on remarque que $f = 0$. Le théorème 2 est démontré.

Corollaire. Soit S une représentation de dimension finie du groupe compact G. La décomposition de cette représentation en composantes irréductibles est de la forme

$$S = \sum_{[T] \in \hat{G}} (\chi_S, \chi_T) T. \tag{3}$$

Problème 2. Démontrer que pour les représentations irréductibles d'un groupe compact G dans les espaces vectoriels réels, l'égalité (1) reste vérifiée, tandis que l'égalité (2) s'écrit sous la forme

$$(\chi_T, \chi_T) = \dim_{\mathbf{R}} \mathscr{C}(T). \tag{2'}$$

Indication. Recourir au théorème 3 de 8.2.

La théorie des caractères est une des méthodes les plus puissantes pour étudier les catégories $\Pi(G, K)$ et les relations entre ces catégories pour de différents corps et anneaux K. Le livre de J. P. Serre [49] est une excellente introduction à ce domaine de la théorie des représentations.

Nous nous limiterons ici à citer deux résultats possédant de nombreuses applications.

Soit T une représentation irréductible unitaire du groupe compact G. Alors, comme nous l'avons vu dans 8.2, les trois cas suivants peuvent se présenter :

1) $\chi_T \neq \overline{\chi_T}$; la représentation T n'est pas équivalente à la représentation $\overline{T}$; la représentation réelle $T_{\mathbf{R}}$ est irréductible et appartient au type complexe ;

2) $\chi_T = \overline{\chi_T}$; la représentation T est équivalente à $\overline{T}$ et à une certaine représentation réelle de type réel ;

3) $\chi_T = \overline{\chi_T}$; la représentation T est équivalente à $\overline{T}$, mais n'est équivalente à aucune représentation réelle ; la représentation $T_{\mathbf{R}}$ appartient au type quaternionique.

Théorème 3 (Critère de Shur). *Les cas cités plus haut se distinguent par la valeur de* $\int_G \chi_T(g^2)\, dg$ *égale à* $0, +1, -1$ *respectivement.* (*La mesure de Haar* dg *est considérée normée de sorte que* $\int_G dg = 1$.)

[1]) Pour les groupes compacts, il suffit de considérer les sommes discrètes.

La démonstration est fondée sur l'identité utile suivante

$$\chi(g^2) = \chi_{S^2T}(g) - \chi_{\wedge^2 T}(g), \qquad (4)$$

où $S^2(T)$ et $\wedge^2 T$ sont les puissances symétrique et extérieure respectivement de la représentation T. En effet, si $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont les valeurs propres de l'opérateur $T(g)$, alors l'opérateur $S^2T(g)$ possède les valeurs propres $\mu_i\mu_j$, $i \leqslant j$ et l'opérateur $\wedge^2 T$ les valeurs propres $\mu_i\mu_j$, $i < j$. Par conséquent,

$$\operatorname{tr} S^2T(g) - \operatorname{tr} \wedge^2 T(g) = \sum_{i \leqslant j} \mu_i\mu_j - \sum_{i<j} \mu_i\mu_j = \sum_i \mu_i^2 = \operatorname{tr} T(g)^2 = \chi(g^2).$$

Rappelons maintenant que, d'après la formule (3), la valeur $\int \chi_T(g)\,dg$ est égale au nombre de représentations unitaires dans la décomposition de la représentation T.

Par conséquent, $\int_G \chi_T(g^2)\,dg$ est la différence entre le nombre de vecteurs invariants indépendants de S^2V et de $\wedge^2 V$, où V est l'espace de la représentation T. Mais

$$S^2V \oplus \wedge^2 V = V \otimes V = \operatorname{Hom}(V, V^*).$$

Le nombre d'invariants indépendants dans ce dernier espace est égal au nombre d'entrelacement $c(T, \overline{T})$. D'après le lemme de Shur, il est nul dans le premier cas (lorsque T n'est pas équivalent à $\overline{T}$), égal à 1 dans le second et le troisième (lorsque $T \sim \overline{T}$). Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier que l'élément invariant $A \in \mathscr{C}(T, \overline{T})$ (défini d'une façon unique à un facteur numérique près d'après le lemme de Shur) est inclus dans $S^2(V)$, si T est équivalente à une représentation réelle, et dans $\wedge^2 T$ dans le cas contraire. Supposons T réelle et, par conséquent, orthogonale. Alors $S^2(V)$ possède un élément invariant $\sum_i v_i \otimes v_i$, où $\{v_i\}$ est une base orthonormée de V. Inversement, si $S^2(V)$ possède un élément invariant, il sera, dans une base appropriée, de la forme $\sum v_i \otimes v_i$ (puisque dans un espace complexe toute forme quadratique non dégénérée se diagonalise). Par conséquent, l'image du groupe G par la représentation T est contenue dans le groupe $O(n, \mathbf{C})$, $n = \dim V$. On sait que chaque sous-groupe compact maximal de $O(n, \mathbf{C})$ est conjugué avec $O(n, \mathbf{R})$. La représentation T est donc équivalente à une représentation réelle.

Il existe d'autres manières de terminer cette démonstration.

Problème 3. Démontrer que dans le cas (3), l'élément invariant de $\wedge^2 V$ est l'image du quaternion $k \in \mathbf{H}$ par l'identification naturelle de $\mathbf{H}$ avec $\mathscr{C}(T_{\mathbf{R}})$.

P r o b l è m e 4. Démontrer le théorème 3 en appliquant aux représentations T et $\overline{T}$ la méthode de construction des opérateurs d'entrelacement, décrite au § 9.

Le deuxième résultat se rapporte à la théorie des représentations des groupes finis.

T h é o r è m e 4. *Si T est une représentation unitaire irréductible d'un groupe fini G, alors* dim T *est un diviseur du nombre* $|G|$.

D é m o n s t r a t i o n. Il découle des relations d'orthogonalité des éléments matriciaux (voir **9.2**) que

$$\chi_T * \chi_T = \frac{|G|}{\dim T} \chi_T. \tag{5}$$

Itérant cette relation n fois, nous obtenons l'égalité

$$\chi_T * \ldots * \chi_T (e) = \frac{|G|^n}{(\dim T)^{n-1}}. \tag{6}$$

Faisons maintenant appel à la notion de nombres entiers algébriques et à leurs propriétés les plus simples. Le nombre $\lambda \in \mathbf{C}$ s'appelle *entier algébrique* s'il satisfait à une équation de la forme

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{7}$$

où $a_i \in \mathbf{Z}$.

P r o b l è m e 5. Démontrer que les nombres entiers algébriques forment un sous-anneau de $\mathbf{C}$.

I n d i c a t i o n. Recourir aux formules de Viète et montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des collections de racines de deux équations de la forme (7), alors $\{\lambda_i \pm \mu_i\}$ et $\{\lambda_i\mu_j\}$ sont également des collections de racines de deux équations de la forme (7).

P r o b l è m e 6. Démontrer qu'un nombre rationnel est entier algébrique seulement s'il est entier.

I n d i c a t i o n. Supposer que $\lambda = p/q$ soit une fraction irréductible et multiplier le membre gauche de l'équation (7) par q^n. Démontrer que l'on obtient alors un nombre entier, non divisible par q.

P r o b l è m e 7. Démontrer que le caractère de la représentation d'un groupe fini G prend des valeurs entières algébriques en chaque point $g \in G$.

I n d i c a t i o n. Si $g \in G$, alors $g^N = e$ pour un certain N entier. Par conséquent, les valeurs propres de l'opérateur $T(g)$ satisfont à l'équation $\lambda^N - 1 = 0$.

L'énoncé du théorème découle du fait suivant.

P r o b l è m e 8. Démontrer que les deux membres de l'égalité (6) sont des nombres entiers.

I n d i c a t i o n. Récrire le membre gauche sous la forme

$$\sum_{g_1 g_2 \ldots g_{n+1} = e} \chi_T(g_1) \ldots \chi_T(g_{n+1})$$

et recourir aux résultats des problèmes 5-7.

Une autre démonstration du théorème 4, également basée sur la notion de nombre entier algébrique, s'obtient en considérant deux bases dans le centre de l'algèbre C $[G]$: une base se compose de caractères des représentations irréductibles, l'autre de fonctions caractéristiques des classes d'éléments conjugués (voir, par exemple, [49]).

Le résultat du théorème 4 peut être précisé de la manière suivante :

Problème 9. Soit Z le centre du groupe G. Alors la dimension d'une représentation irréductible quelconque T du groupe G est un diviseur du nombre $|G|/|Z|$.

Indication (Tate). Démontrer que la représentation $T \times \ldots \times T$ du groupe $G \times \ldots \times G$ (n facteurs) est irréductible et triviale sur le sous-groupe de $Z \times \ldots \times Z$ formé de tous les éléments $(z_1, \ldots, z_n)$ tels que $\prod_{=1}^{n} z_i = e$.

Cette propriété des dimensions, réunie aux égalités de 10.1, permet de « prédire », pour de nombreux groupes concrets, la dimension de leurs représentations irréductibles avant de les construire effectivement.

11.2. Caractères des représentations de dimension infinie. La définition du caractère donnée au 11.1 n'est plus valable pour les représentations de dimension infinie, puisque les opérateurs $T(g)$ ne sont pratiquement jamais nucléaires et ne possèdent donc pas de trace raisonnable. Néanmoins, on peut souvent définir le caractère d'une représentation de dimension infinie comme une fonction généralisée sur le groupe G. Cette définition appartient à I. Gelfand et peut être énoncée de la manière suivante :

Soit $D_T(G)$ une certaine sous-algèbre de l'algèbre de groupe $M(G)$ du groupe G, possédant les propriétés :

1) l'espace $D_T(G)$ est invariant par rapport aux translations à droite et à gauche de G;

2) la représentation T du groupe G engendre une représentation $\widetilde{T}$ de l'algèbre $D_T(G)$ et se retrouve de façon unique à partir de cette représentation $\widetilde{T}$;

3) les opérateurs $\widetilde{T}(a)$, $a \in D_T(G)$ sont nucléaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à $V' \hat{\otimes} V$) et l'application $\widetilde{T}: D_T(G) \to V' \hat{\otimes} V$ est continue.

Appelons *caractère de la représentation* T la forme linéaire $\chi \in D_T(G)'$ définie par l'égalité

$$\langle \chi, a \rangle = \operatorname{tr} \widetilde{T}(a). \tag{1}$$

Si G est un groupe de Lie, et $D_T(G) = C_0^\infty(G)$, le caractère χ est une fonction généralisée sur G dans le sens usuel de ce terme.

Pour une représentation de dimension finie T on peut prendre pour $D_T(G)$ la sous-algèbre $M_0(G)$ (ou bien l'algèbre $M(G)$ toute entière, lorsque T est bornée). Dans ce cas, le caractère χ sera de la forme

$$\langle \chi, \mu \rangle = \int_G \chi_T(g)\, d\mu(g), \tag{2}$$

où χ_T est le caractère usuel de la représentation T, défini dans **11.1**.

Pour les groupes de Lie semi-simples, Harish-Chandra a démontré le fait remarquable suivant (voir [93]).

Si T est une représentation unitaire irréductible de G, alors le caractère de T est défini sur la sous-algèbre $C_0^\infty(G)$ et se met sous la forme

$$\langle \chi, f \rangle = \int_G \chi_T(g) f(g)\, dg, \tag{3}$$

où χ_T est une fonction mesurable, localement sommable sur G.

Notons que pour les représentations concrètes T, il n'est en général pas difficile de calculer la fonction χ_T. Nous le ferons pour une large classe de représentations au § 13. La difficulté principale consiste à démontrer le théorème sans encore savoir la forme explicite de la représentation.

Pour les groupes de Lie nilpotents, les caractères des représentations unitaires sont également définis sur $C_0^\infty(G)$, mais peuvent s'avérer des fonctions généralisées de nature plus compliquée (ou plusieurs variables sont remplacées par la δ-fonction).

Les caractères des représentations irréductibles unitaires des groupes de Lie résolubles sont encore plus compliqués. Leur domaine de définition est en général beaucoup plus étroit que $C_0^\infty(G)$. Dans ce cas, pour que l'opérateur $T(f)$ possède une trace, il ne suffit pas que la fonction f soit différenciable et finie, mais il faut avoir encore des conditions supplémentaires définissant dans $C_0^\infty(G)$ un sous-espace de codimension infinie. Nous en reparlerons en plus de détail aux §§ 12 et 15.

Il peut arriver enfin (même pour un groupe de Lie) que l'opérateur $\widetilde{T}(a)$ n'est nucléaire que pour les éléments de l'algèbre de groupe appartenant au noyau de la représentation T.

Théorème 1. *Soit G un groupe localement compact. Pour que le caractère de chaque représentation irréductible T dans l'espace H soit défini sur un certain sous-espace $D_T(G) \subset C^*(G)$ qui possède la propriété $\widetilde{T}(D_T(G)) \neq 0$ il faut et il suffit que G soit apprivoisé.*

Par conséquent, les groupes apprivoisés sont naturellement définis du point de vue de la théorie des caractères dans l'ensemble de tous les groupes localement compacts.

Le théorème 1 découle du théorème suivant qui se rapporte aux C^*-algèbres.

Théorème 2 (Dixmier-Glimm-Sakai). *Les propriétés suivantes de la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ sont équivalentes :*

1) *Pour chaque $*$-représentation irréductible T de l'algèbre $\mathfrak{A}$, son image $T(\mathfrak{A})$ contient au moins un opérateur complètement continu.*

2) *Pour chaque $*$-représentation irréductible T de l'algèbre $\mathfrak{A}$, son image $T(\mathfrak{A})$ contient tous les opérateurs complètement continus.*

3) *Chaque $*$-représentation $\mathfrak{A}$ appartient au type* I.

Pour la démonstration de ce théorème dans le cas des C^*-algèbres $\mathfrak{A}$ séparables, voir le livre de Dixmier [15]. On y trouvera également les références aux articles de Sakai où l'on traite le cas non séparable.

Les caractères introduits possèdent de nombreuses propriétés des caractères usuels des représentations de dimension finie. Ainsi, ils sont invariants par rapport aux automorphismes internes G: $\langle\chi, L_gR_gf\rangle = \mathrm{tr}\ T(L_gR_gf) = \mathrm{tr}\ [T(g)\ T(f)\ T(g^{-1})] = \mathrm{tr}\ T(f) = \langle\chi, f\rangle$. (Pour une fonction usuelle χ cette propriété se réduit à l'invariance sur les classes d'éléments conjugués.)

Théorème 3. *Une représentation irréductible T est définie à équivalence près par son caractère.*

Démonstration. L'ensemble des éléments $a \in C^*(G)$, tels que $a^*a \in D_T(G)$, forme un espace préhilbertien par rapport au produit scalaire $(a, b)_\chi = \langle\chi, b^*a\rangle$. Soit $H\chi$ l'espace hilbertien correspondant. L'application $a \to \widetilde{T}(a)$ définit un isomorphisme de H_χ sur l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt dans l'espace H de la représentation T, cet isomorphisme envoie les translations à gauche et à droite par $g \in G$ dans les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par $T(g)$. La représentation de G dans H_χ par translations à gauche est donc équivalente à $(\dim T)\cdot T$.

Ainsi, dans chaque sous-espace irréductible H nous obtenons une représentation équivalente à T.

Par les théorèmes 1 et 3 la classification des représentations irréductibles unitaires des groupes apprivoisés se ramène à étudier tous leurs caractères. Nous verrons dans **11.3** que pour les groupes de Lie, les caractères satisfont à un certain système d'équations différentielles, ce qui permet dans de nombreux cas importants de leur donner des formules explicites.

Le fait que le domaine de définition d'un caractère n'est pas connu a priori et, en particulier, s'il contient ou non une seule au moins « vraie » fonction sur le groupe rend l'analyse des caractères assez difficile à réaliser. (Rappelons que la C^*-algèbre du groupe G

s'obtient en complétant $L'(G, d_l g)$ pour une certaine norme. Le calcul de cette norme nécessite la connaissance de beaucoup de représentations de G. Par conséquent, la structure des « éléments idéaux » à ajouter n'est pas connue a priori.) Bien que l'intersection $D_T(G) \cap \cap L'(G, d_l g)$ soit dense dans $D_T(G)$ pour tous les exemples étudiés jusqu'à présent le théorème général n'est pas encore démontré.

11.3. Caractères infinitésimaux. Les caractères des représentations irréductibles d'un groupe de Lie admettent une autre définition qui n'a un sens que pour les représentations irreductibles.

Soient G un groupe de Lie connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante et $Z(\mathfrak{g})$ son centre.

P r o b l è m e 1. Démontrer que $Z(\mathfrak{g})$ se trouve dans le centre de $R(G)$ (pour l'inclusion naturelle de $U(\mathfrak{g}) \approx R(G, \{e\})$ dans $R(G)$; voir **10.4**).

I n d i c a t i o n. Les combinaisons linéaires des delta-fonctions δ_g (par définition $\langle \delta_g, f\rangle = f(g)$ pour $f \in C^\infty(G)$) forment un ensemble dense dans $R(G)$. L'assertion du problème découle du fait qu'un groupe connexe est engendré par un voisinage canonique de l'unité et par l'identité ci-dessous.

P r o b l è m e 2. Soit $X \in U(\mathfrak{g})$, $Y \in \mathfrak{g}$; alors

$$\delta_{\exp Y} * X * \delta_{\exp(-Y)} = e^{\widetilde{\mathrm{ad}}\, Y} X = \widetilde{\mathrm{Ad}}(\exp Y)\, X,$$

où $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ (respectivement $\widetilde{\mathrm{ad}}$) est une représentation de G (respectivement de $\mathfrak{g}$) par automorphismes (respectivement par différentiations) de $U(\mathfrak{g})$, qui prolonge la représentation adjointe (respectivement régulière).

I n d i c a t i o n. Etudier d'abord le cas $X \in \mathfrak{g}$.

Si T est une représentation irréductible de dimension finie d'un groupe connexe de Lie G, alors, d'après le lemme de Shur, les éléments du centre $R(G)$ sont transformés en opérateurs scalaires. En particulier, pour $z \in Z(\mathfrak{g})$

$$T(z) = \lambda_T(z) \cdot 1. \tag{1}$$

Il est évident que l'application $z \mapsto \lambda(z)$ est un homomorphisme de l'algèbre $Z(\mathfrak{g})$ dans le corps $\mathbf{C}$. Cet homomorphisme s'appelle *caractère infinitésimal* de la représentation T. Etudions ses rapports avec le caractère usuel.

P r o b l è m e 3. Démontrer l'identité

$$\lambda_T(z) = \frac{\langle z, \chi_T\rangle}{\dim T}. \tag{2}$$

I n d i c a t i o n. Mettre dans le membre gauche de (1) la définition de $T(z)$ (voir **10.5**) et prendre ensuite la trace des deux membres.

Par conséquent, le caractère infinitésimal λ_T peut être déterminé à partir du caractère usuel χ_T.

Le problème de la validité de la réciproque dépend du groupe considéré et s'avère plus difficile à résoudre.

Problème 4. Soit T une représentation irréductible de dimension finie du groupe G et λ_T son caractère infinitésimal. Démontrer que chaque élément matriciel $t_{\xi,\eta}$ de la représentation T satisfait au système d'équations différentielles

$$z * t_{\xi,\eta} = \lambda_T(z)\, t_{\xi,\eta}, \quad z \in Z(\mathfrak{g}). \tag{3}$$

Indication. Faire appel à l'identité

$$T(z*\delta_g) = T(z)\, T(\delta_g) = \lambda_T(z)\, T(g).$$

Pour déterminer le caractère χ_T à partir du caractère infinitésimal λ_T, il faut, par conséquent, résoudre le système d'équations (3) dans la classe des fonctions invariantes par rapport aux automorphismes internes. Pour les groupes de Lie semi-simples, le problème considéré peut être complètement résolu (il se réduit à résoudre un système d'équations différentielles à coefficients constants; voir [63]). Le cas général se réduit pratiquement au cas semi-simple, car chaque groupe linéaire irréductible est soit semi-simple, soit le produit d'un sous-groupe semi-simple et du centre de dimension 1. Par conséquent, si T est une représentation exacte irréductible du groupe G, alors son caractère χ_T (et par conséquent la représentation elle-même) est défini par le caractère infinitésimal λ_T.

Remarquons que l'exigence que T soit exacte est ici fort importante. Par exemple, le groupe des transformations affines de la droite $x \to ax + b$ possède une série de représentations de dimension 1 $T_\rho(a, b) = a^\rho$, qui ne sont pas définies par le caractère infinitésimal, vu que pour ce groupe $Z(\mathfrak{g})$ se compose de scalaires.

Passons au cas de dimension infinie. Soit T une représentation irréductible de G dans un espace localement convexe complet V, et T^∞ la représentation correspondante de $R(G)$ dans le sous-espace de Görding $V^\infty \subset V$. Alors les opérateurs $T^\infty(z)$, $z \in Z(\mathfrak{g})$ sont permutables à tous les opérateurs de la représentation T. En général, on ne peut pas encore en déduire qu'ils sont des scalaires. La méthode usuelle à éviter cette difficulté consiste à ne considérer que les représentations vérifiant (1). Ces représentations s'appellent *simples*.

Théorème 1. *Chaque représentation irréductible unitaire T du groupe de Lie G est simple et, par conséquent, possède un caractère infinitésimal λ_T.*

Démonstration. Faisons appel au fait que la représentation T est 2-irréductible (voir **7.3**), et, donc, chaque opérateur fermé, permutable aux opérateurs de T, doit être scalaire. Soit $z \in Z(\mathfrak{g})$. Représentons z en forme de somme des composantes homogènes: $z = \sum z_k$, $z_k \in \sigma(S^k(\mathfrak{g}))$ (voir **10.4**). Du théorème 2 et du

problème 8 de **10.4** il découle que chaque composante z_k se trouve également dans $Z(\mathfrak{g})$. Montrons que l'opérateur $T^\infty(z_k)$ admet une fermeture. En effet, les opérateurs $T^\infty(X)$, $X \in \mathfrak{g}$ ont la propriété $T^\infty(X) \subset T^\infty(-X)^*$ (voir **10.5**). Par conséquent $T^\infty(z_k) \subset$ $\subset (-1)^h T^\infty(z_k)^*$, ce qu'il nous fallait pour démontrer le théorème.

De même que dans le cas de dimension finie, on démontre que les éléments matriciaux de la représentation T satisfont au système d'équations (3). Supposons que la représentation T possède un caractère généralisé (dans le sens indiqué dans **11.2**), défini sur un certain sous-espace $D(G) \subset C_0^\infty(G)$. Montrons que ce caractère χ satisfait également au système d'équations:

$$z*\chi = \lambda_T(z)\,\chi,\ z \in Z(\mathfrak{g}). \tag{4}$$

Par définition, cela signifie que pour chaque fonction $f \in D(G)$ on a l'égalité

$$\langle z*\chi,\ f\rangle = \lambda_T(z)\,\langle\chi,\ f\rangle,$$

c'est-à-dire

$$\langle z,\ \mathrm{tr}\,T(g)\,T(f)\rangle = \lambda_T(z)\,\mathrm{tr}\,T(f),$$

ce qui découle de la nucléarité de $T(f)$ et des relations (3) pour les éléments matriciaux de la représentation T.

Ce résultat donne la possibilité de chercher les caractères généralisés des représentations unitaires irréductibles comme solutions d'un système d'équations différentielles (4) dans la classe des fonctions généralisées sur G, invariantes par rapport aux automorphismes internes de G.

Pour les groupes de Lie complexes semi-simples, cette méthode permet de classifier totalement une large classe de représentations simples, y compris toutes les représentations unitaires et les représentations dans les espaces de Banach.

Malheureusement, les tentatives d'en distinguer les représentations unitaires se heurtent à des difficultés considérables. Cette étude n'est pas encore terminée.

Pour plus de détails sur ces problèmes de la théorie des représentations, voir [63], [97], [120].

La théorie des caractères infinitésimaux dépend essentiellement de la structure de l'algèbre $Z(\mathfrak{g})$. Nous avons vu au **10.4** que l'algèbre gr $Z(\mathfrak{g})$ coïncide avec l'algèbre $S(\mathfrak{g})^G$ des éléments invariants de l'algèbre $S(\mathfrak{g})$. Dans tous les exemples examinés, l'algèbre $Z(\mathfrak{g})$ est isomorphe à gr $Z(\mathfrak{g})$. En particulier, ce fait est démontré pour les groupes de Lie semi-simples et résolubles.

Une interprétation de ce fait du point de vue de la méthode des orbites sera donnée au § 15 [1]).

---

[1]) M. Duflo a récemment démontré ce fait à l'aide de la méthode des orbites dans le cas général; voir [75].

La construction et l'étude des *caractères infinitésimaux généralisés*, liés au corps de Lie $D(\mathfrak{g})$ (voir **10.4**) est un problème particulièrement intéressant. Soit X un élément du centre de $D(\mathfrak{g})$. Cet élément s'écrit sous la forme : PQ^{-1}, $P, Q \in U(\mathfrak{g})$.

Si T est une représentation irréductible unitaire du groupe G, et T^∞ la représentation correspondante de $U(\mathfrak{g})$, les opérateurs $T^\infty(P)$ et $T^\infty(Q)$ ne diffèrent que d'un multiple scalaire: $T^\infty(P) = \lambda T^\infty(G)$.

On peut montrer que le nombre λ ne dépend que de X (et non du choix de P et Q dans l'égalité $X = PQ^{-1}$) ; nous le désignerons donc par $\lambda(X)$. La correspondance $X \mapsto \lambda(X)$ définit une application du centre du corps $D(\mathfrak{g})$ dans la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ et possède la propriété

$$\lambda(X+Y) = \lambda(X) + \lambda(Y), \quad \lambda(XY) = \lambda(X)\,\lambda(Y)$$

dans tous les cas, où les identités écrites ont un sens. C'est cette application qui est le caractère infinitésimal de la représentation T.

§ 12. TRANSFORMATION DE FOURIER ET DUALITÉ

Une des branches de la théorie des représentations des groupes, appelée analyse harmonique, consiste à étudier les espaces de fonctions sur les groupes et les espaces homogènes en termes des représentations qui y apparaissent. Un rôle important revient ici à la transformation généralisée de Fourier. On sait bien que la transformation de Fourier classique sur la droite réelle transforme les translations en multiplications par une fonction et permet donc d'obtenir la décomposition spectrale d'un opérateur quelconque permutable aux translations (par exemple l'opérateur différentiel à coefficients constants). La représentation généralisée de Fourier est appelée à jouer le même rôle pour un groupe quelconque. Cette transformation se définit de la manière suivante. Soit G un groupe topologique et $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G. Choisissons pour chaque classe $\lambda \in \hat{G}$ une représentation T_λ, appartenant à cette classe, qui agit dans un espace hilbertien H_λ.

La représentation T_λ se prolonge à une représentation de l'anneau de groupe $M(G)$ dans le même espace H_λ. On appelle *transformation de Fourier* de l'élément $\mu \in M(G)$ toute fonction opératoire $\tilde{\mu}$ sur $\hat{G}$ prenant au point $\lambda \in \hat{G}$ la valeur dans End H_λ définie par la formule

$$\tilde{\mu}(\lambda) = \int_G T_\lambda(g)\,d\mu(g). \tag{1}$$

En particulier, si le groupe G est localement compact, et $f \in L^1(G, d_l g)$ nous écrirons

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_G f(g) T_\lambda(g) d_l g. \tag{2}$$

Si G est un groupe de Lie, la notion de transformation de Fourier se généralise aux éléments de l'anneau $R(G)$, en posant

$$\tilde{x}(\lambda) = T_\lambda^\infty(x) \in \operatorname{End} H_\lambda^\infty. \tag{3}$$

Il est évident que la transformation ainsi définie applique chaque translation à gauche (à droite) par g dans l'opérateur de multiplication à gauche (à droite) par la fonction opératoire $\lambda \mapsto T_\lambda(g)$. Nous verrons plus loin que dans le cas le plus général de nombreuses propriétés usuelles de la transformation de Fourier classique restent inchangées. Pour certaines classes de groupes (commutatifs, compacts, finis), la transformation de Fourier est déjà bien étudiée et possède des propriétés particulières. Nous commençons par étudier ces classes de groupes pour passer ensuite au cas général.

12.1. Groupes commutatifs. La propriété essentielle des groupes commutatifs, du point de vue de l'analyse harmonique, est que l'espace dual $\hat{G}$ représente lui-même un groupe topologique. Toutes les représentations unitaires irréductibles d'un groupe commutatif G sont de dimension 1 (voir le théorème 2 de **7.3** ou **4.4**). Par conséquent, le produit tensoriel de deux représentations irréductibles est à nouveau irréductible. Chacune de ces représentations peut être considérée comme fonction numérique usuelle sur G satisfaisant aux conditions

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2), \quad |f(g)| \equiv 1. \tag{1}$$

L'opération de produit tensoriel se réduit à la multiplication usuelle des fonctions. Il est clair que par rapport à cette opération $\hat{G}$ est un groupe. L'unité de $\hat{G}$ est la représentation triviale $f_0(g) \equiv 1$, et l'élément inverse de f sera sa représentation conjuguée complexe $\bar{f}$. La topologie définie dans **7.3** se réduit dans ce cas à la topologie de convergence uniforme sur les compacts.

Problème 1. Vérifier que $\hat{G}$ est un groupe topologique, et que si G est localement compact (respectivement discret, compact), alors $\hat{G}$ est localement compact (respectivement compact, discret).

Le groupe $\hat{G}$ ainsi obtenu s'appelle *dual au groupe G par dualité de Pontriaguine*, ou *groupe dual*, ou, enfin, *groupe des caractères du*

groupe G. (Remarquons que chaque représentation de dimension coïncide avec son propre caractère.)

Le groupe $\hat{G}$ nous permet de construire une fois de plus le groupe dual $(\hat{G})\hat{} = \hat{\hat{G}}$, etc. Il existe une application naturelle de G dans $\hat{\hat{G}}$, qui fait correspondre à chaque élément $g \in G$ le caractère (c'est-à-dire la représentation de dimension 1) du groupe $\hat{G}$ prenant au point $\chi \in \hat{G}$ la valeur $\chi(g)$.

Pour les exemples plus importants, lorsque $G = \mathbf{R}$, Z ou $\mathbf{T}$, les groupes duaux (sans topologie) ont déjà été calculés au § 6 (voir problème 4 de 6.1).

Problème 2. Démontrer que nous avons les isomorphismes de groupes topologiques suivants:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}, \quad \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{Z}, \quad \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{Z}}_n = \mathbf{Z}_n.$$

Les transformations de Fourier correspondantes sont depuis longtemps employées dans diverses branches des mathématiques et leurs applications. Si $G = \mathbf{R}$, la transformation de Fourier s'écrit

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt$$

et coïncide donc avec la transformation de Fourier classique.

Pour $G = \mathbf{T}$, nous obtenons

$$\tilde{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} f(\varphi)\, d\varphi, \quad n \in Z,$$

où φ est le paramètre canonique (l'angle) sur le cercle $\mathbf{T}$. Par conséquent, la transformation de Fourier de la fonction f dans ce cas lui fait correspondre la famille des coefficients dans sa série de Fourier.

Pour $G = Z$, la formule générale s'écrit sous la forme

$$\tilde{f}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) z^n, \quad z \in \mathbf{T},$$

c'est-à-dire qu'à la suite $\{f(n)\}$ on fait correspondre sa *fonction génératrice*.

Enfin, pour $G = \mathbf{Z}_n$, la transformation de Fourier s'écrit

$$\tilde{f}(k) = \sum_{l=0}^{n-1} f(l)\, e^{2\pi kli/n}, \quad k,\ l \in \mathbf{Z}_n.$$

Dans tous les exemples cités, le groupe $\hat{\hat{G}}$ est isomorphe à G, et cet isomorphisme peut être défini de sorte que les transformations

de Fourier de G à $\hat{G}$, et de $\hat{G}$ à $\hat{\hat{G}} \approx G$ soient inverses l'une à l'autre. Ce fait est la manifestation du principe général de dualité, que l'on peut énoncer de la manière suivante.

Théorème 1 (L. Pontriaguine). *Pour chaque groupe localement compact commutatif G, l'application canonique de G dans $\hat{\hat{G}}$ est un isomorphisme de groupes topologiques. On peut normer la mesure de Haar sur G et $\hat{G}$, de sorte que les transformations de Fourier de G à $\hat{G}$ et de $\hat{G}$ à $\hat{\hat{G}} = G$ soient liées par les relations*

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}(\chi) &= \int_G f(g)\,\chi(g)\,dg, \\ f(g) &= \int_{\hat{G}} \tilde{f}(\chi)\,\overline{\chi(g)}\,d\chi, \\ \int_G |f(g)|^2\,dg &= \int_{\hat{G}} |\tilde{f}(\chi)|^2\,d\chi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Si le groupe G est compact, et la mesure dg est normée de sorte que $\int_G dg = 1$, le groupe $\hat{G}$ est alors discret, et chacun de ses points possède une mesure égale à un. Inversement, si G est discret, et chaque point possède une mesure égale à un, alors $\hat{G}$ est compact et $\int_{\hat{G}} d\chi = 1$.

Il existe deux sortes de démonstrations de ce théorème. La première consiste à étudier la structure des groupes localement compacts commutatifs. Il se trouve que chaque groupe localement compact commutatif s'obtient par les opérations de somme, de produit, de limite projective et inductive à partir des groupes « élémentaires » **R**, **Z**, **T** et $\mathbf{Z}_n$. Pour les groupes élémentaires, le théorème se démontre directement. On démontre ensuite que les opérations de somme, de produit, de limite inductive et projective se transforment en passant au groupe dual dans les opérations de produit, de somme, de limite projective et inductive respectivement. Pour un exposé détaillé voir le livre de L. Pontriaguine [46] ou de A. Weyl [56].

Une autre sorte de démonstration se fonde sur la théorie des algèbres de Banach. Elle ne nécessite aucune connaissance de la structure des groupes, mais ne donne aucune information au sujet de cette structure. Une démonstration de ce type fut d'abord proposée par D. Raikov. Ses variantes sont exposées dans les livres [8], [23], [44].

Exposons ici les détails les plus importants de cette démonstration. Remarquons d'abord que si le groupe G n'est pas discret, alors, en vertu du théorème 1 de **10.2**, l'ensemble $\hat{G}$ s'obtient de $\mathfrak{M}$ $(C^*(G))$,

spectre de l'algèbre $C^*(G)$, en éliminant le seul point correspondant à la représentation dégénérée de $C^*(G)$. Pour un groupe discret G, l'ensemble $\hat{G}$ coïncide avec $\mathfrak{M}(C^*(G))$. La transformation de Fourier sur le groupe G coïncide évidemment avec la transformation de Gelfand de la C^*-algèbre $C^*(G)$.

D'après le théorème de Gelfand de 4.3, l'image de $C^*(G)$ par cette transformation sera $C(\mathfrak{M}(C^*(G)))$. Par conséquent, l'image de $L^1(G, dg)$ par la transformation de Fourier est dense dans l'ensemble $C_1(\hat{G})$ de toutes les fonctions continues sur $\hat{G}$ tendant vers 0 à l'infini.

Considérons maintenant l'ensemble des transformations de Fourier des fonctions de $L^1(G, dg) \cap C(G)$. On peut définir sur l'espace de ces fonctions une forme linéaire

$$F(\tilde{f}) = f(e). \tag{3}$$

Cette forme est invariante par rapport aux translations de $\hat{G}$, puisque la translation de la fonction $\tilde{f}$ par $\chi \in \hat{G}$ équivaut à la multiplication de f par χ, qui ne change pas la valeur de $f(e)$. Si nous savions d'avance que le domaine de définition de F contient l'espace $C_0(\hat{G})$ des fonctions finies continues sur $\hat{G}$, la forme F pourrait s'écrire comme suit :

$$F(\varphi) = \int_{\hat{G}} \varphi(\chi)\, d\chi, \quad \varphi \in C_0(\hat{G}), \tag{4}$$

où $d\chi$ est la mesure sur $\hat{G}$. De l'invariance de F on déduit que $d\chi$ est une mesure de Haar sur $\hat{G}$. Prenant pour f le produit de convolution des fonctions f_1 et f_2^*, nous aurions obtenu de (3) et (4) l'égalité

$$(f_1 * f_2^*)(e) = \int_{\hat{G}} (f_1 * f_2^*)^{\sim}(\chi)\, d\chi,$$

qui (d'après la définition du produit de convolution, de la transformation de Fourier et de l'involution) peut être mise sous la forme

$$\int_G f_1(g)\, \overline{f_2(g)}\, dg = \int_{\hat{G}} \tilde{f}_1(\chi)\, \overline{\tilde{f}_2(\chi)}\, d\chi. \tag{5}$$

Par conséquent, la transformation de Fourier se prolonge à un isomorphisme des espaces hilbertiens $L^2(G, dg)$ et $L^2(\hat{G}, d\chi)$. Ceci démontre la dernière des égalités (2) dans l'énoncé du théorème.

Prenant pour f_2, dans l'égalité (5), une suite de type δ et supposant f_1 continue et $\tilde{f}_1$-sommable, nous obtenons la deuxième des égalités (2).

Problème 3. Déduire des propriétés obtenues de la transformation de Fourier l'énoncé du théorème sur l'isomorphisme des groupes topologiques G et $\hat{\hat{G}}$.

Indication. Démontrer successivement que l'application canonique de G dans $\hat{\hat{G}}$ est une inclusion, que la topologie de G coïncide avec la topologie iuduiet sur G par son inclusion dans $\hat{\hat{G}}$, que G est dense dans $\hat{\hat{G}}$ et, enfin, que G est fermé dans $\hat{\hat{G}}$.

Malheureusement, il n'existe pas, même aujourd'hui, de démonstration directe du fait que la forme F est définie et continue sur $C_0(\hat{G})$. C'est pour cette raison, que l'on fait généralement appel à une démonstration indirecte de l'égalité (4).

Problème 4. Démontrer que si f_1 et f_2 appartiennent à $L^1(G) \cap L^2(G)$, alors $f_1 * f_2$ est une fonction continue sur G.

Indication. Vérifier que

$$|(f_1 * f_2)(x)| \leqslant \| f_1 \|_{L^2(G)} \| f_2 \|_{L^2(G)},$$

et recourir au fait que les fonctions continues sont denses dans $L^1(G) \cap L^2(G)$.

Problème 5. Si $\varphi \in C^*(G)$, $f \in L^2(G)$, alors $\varphi * f \in L^2(G)$, où $\| \varphi * f \|_{L^2(G)} \leqslant \| \varphi \|_{C^*(G)} \| f \|_{L^2(G)}$.

Indication. Faire appel au résultat du problème 2 de 4.3.

Soit $A(G)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions de la forme $f_1 * f_2$, $f_i \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Alors, d'après les considérations ci-dessus, nous avons, pour $f \in A(G)$, l'application

$$\varphi \to (\varphi * f)(e)$$

qui est une forme continue sur $C^*(G)$. Par conséquent, pour chaque $f \in A(G)$, il existe une mesure μ_f sur $\hat{G}$, telle que

$$(\varphi * f)(e) = \int_{\hat{G}} \tilde{\varphi}(\chi)\, d\mu_f(\chi), \tag{6}$$

quel que soit $\varphi \in L'(G)$.

Problème 6. Démontrer l'égalité

$$\tilde{f}\mu_h = \tilde{h}\mu_f$$

pour tous les $f, h \in A(G)$.

Indication. Utiliser les égalités

$$\varphi*(f*h) = (\varphi*f)*h = (\varphi*h)*f.$$

Problème 7. Démontrer qu'il existe une mesure μ sur $\hat{G}$, telle que

$$\mu_f = \tilde{f}\mu,$$

quel que soit $f \in A(G)$.

Indication. Recourir à l'énoncé du problème 6 et au fait que l'image de $A(G)$ dans $C_0(\hat{G})$, par la transformation de Fourier, est dense.

Problème 8. Démontrer que la mesure μ dans l'énoncé du problème 7 est une mesure de Haar sur $\hat{G}$.

Indication. Recourir à l'égalité

$$[(\varphi\cdot\chi)*(f\cdot\chi)]\,(e) = (\varphi*f)\,(e).$$

Ainsi, nous obtenons la relation

$$(\varphi*f)\,(e)=\int_{\hat{G}}(\varphi*f)^{\sim}\,d\chi,\quad \varphi\in C^*(G),\quad f\in A(G),$$

qui remplace (et précise) l'égalité (4) qui nous manquait.

L'étude de la transformation de Fourier des groupes localement compacts commutatifs a fait l'objet de nombreux travaux. Un exposé suffisamment détaillé de cette branche de l'analyse harmonique figure dans le livre de H. Hewitt et C. Ross [33], dont une traduction russe est en voie de préparation. Citons ici quelques faits parmi les plus importants.

Notons avant tout le caractère fonctoriel de l'application $G \to \hat{G}$. A chaque morphisme $\varphi: G_1 \to G_2$ correspond le morphisme dual $\hat{\varphi}: \hat{G}_2 \to \hat{G}_1$ qui applique $\chi \in \hat{G}_2$ dans $\chi\circ\varphi$.

Théorème 2. *Si G_0 est un sous-groupe fermé d'un groupe localement compact commutatif G et G_1 le groupe quotient correspondant, alors $\hat{G}_1$ coïncide avec le sous-groupe $G_0^{\perp} \subset \hat{G}$ formé de tous les caractères triviaux sur G_0 et $\hat{G}_0$ coïncide avec le groupe quotient correspondant.*

Ainsi, à la suite exacte

$$1 \longrightarrow G_0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G_1 \longrightarrow 1$$

correspond la suite exacte

$$1 \longleftarrow \hat{G}_0 \xleftarrow{\hat{i}} \hat{G} \xleftarrow{\hat{p}} \hat{G}_1 \longleftarrow 1.$$

Supposons que les mesures de Haar dg, dg_0, dg_1 sur G, G_0, G_1 soient normées de sorte à avoir la condition $dg = dg_0\cdot dg_1$.

Considérons la forme linéaire F sur $C_0\,(G)$ faisant correspondre à chaque fonction f son intégrale sur le sous-groupe $G_0 \subset G$

$$F\,(f)=\int_{G_0} f\,(g_0)\,dg_0.$$

Il est évident que cette forme est invariante par rapport aux translations par éléments de G_0 et par rapport à la multiplication par les caractères du groupe G triviaux sur G_0. Nous allons considérer F comme une forme de $\tilde{f} \in C\,(\hat{G})$. Elle sera alors invariante par rapport à la multiplication par les caractères du groupe $\hat{G}$ correspondant aux éléments de G_0 (c'est-à-dire triviaux sur $\hat{G}_1 = G_0^{\perp}$), et par rap-

port aux translations par les éléments $\chi_1 \in \hat{G}_1$. Ceci nous suggère la relation suivante.

Problème 9. Démontrer que F peut s'écrire

$$F(\widetilde{f}) = \int_{\hat{G}} \widetilde{f}(\chi_1)\, d\chi_1,$$

où $d\chi_1$ est la mesure de Haar sur $\hat{G}_1 = G_0^{\perp}$ correspondant à la mesure dg_1 sur G_1.

Indication. Appliquer la formule d'inversion à la fonction φ sur G_1, définie par l'égalité

$$\varphi(gG_0) = \int_{G_0} f(gg_0)\, dg_0.$$

Corollaire. *Si la transformation de Fourier sur* $\mathbf{R}$ *est donnée par la formule* $\widetilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\, dx$, *pour chaque* $\alpha > 0$ *nous avons l'égalité* (formule de Poisson):

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widetilde{f}\left(\frac{2\pi k}{\alpha}\right).$$

Parmi les nombreux résultats concernant l'action de la transformation de Fourier sur diverses classes de fonctions sur un groupe, nous noterons le fait suivant.

Théorème 3. *La restriction de la transformation de Fourier sur* $L^1(G) \cap L^p(G)$, $1 < p < 2$ *se prolonge à un opérateur linéaire à la norme* $\leqslant 1$, *qui applique* $L^p(G)$ *dans* $L^q(\hat{G})$, où $q = \frac{p}{p-1}$.

La démonstration de ce théorème et d'autres assertions analogues est basée sur la très belle idée d'interpolation. A savoir, on démontre que le logarithme de la norme dans $L^q(\hat{G})$ de la fonction $\widetilde{f}$, où $f \in L^1(G) \cap L^p(G)$ est une fonction convexe de $1/p$ sur le segment $1/2 \leqslant 1/p \leqslant 1$.

On peut citer bien des résultats appelés à préciser et à généraliser le principe suivant:

les propriétés de différenciabilité et de décroissance rapide à l'infini sont appliquées l'une dans l'autre par les transformations de Fourier.

Pour le cas $G = R^n$, une des formulations exactes est la suivante. Posons pour $f \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$

$$\| f \|_{k,l} = \int_{R^n} |(1 + \| x \|^{2k} + \Delta^l) f|^2\, dx,$$

$$\text{où } \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2, \quad \Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

La fermeture de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_{k,l}$ se compose, grosso modo, de fonctions qui possèdent $2l$ dérivées décroissant à l'infini comme $\frac{1}{\|x\|^{2k-n-2}}$. Le complété de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ pour tout l'ensemble des normes $\|\cdot\|_{k,l}$ coïncide avec l'espace de Schwartz $S(R^n)$.

Théorème 4. *La transformation de Fourier applique l'espace de Schwartz en lui-même, de sorte que*

$$\|\tilde{f}\|_{k,l} = \|f\|_{l,k}.$$

La démonstration découle immédiatement du fait suivant.

Problème 10. Supposons que les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans $G = \mathbf{R}^n$ et $y_1, \ldots, y_n$ dans $\hat{G} \approx \mathbf{R}^n$ soient choisies de sorte que

$$\langle \chi, g \rangle = e^{i(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)}.$$

Démontrer que les opérateurs de multiplication par x_k et de différentiation par x_k sont envoyés par la transformation de Fourier dans les opérateurs $i\frac{\partial}{\partial y_k}$ et dans l'opérateur de multiplication par $-iy_k$ respectivement.

Notons que l'on peut définir, pour chaque groupe localement compact, les espaces analogues à C^∞, C_0^∞ et S. Cette définition est fondée sur le fait que chaque groupe localement compact est la limite projective des groupes de Lie.

Plus précisément, dans chaque voisinage de l'unité $e \in G$, il existe un sous-groupe invariant compact K tel que le groupe quotient G/K est un groupe de Lie. Pour les espaces $C^\infty(G)$ et $C_0^\infty(G)$ on prend la limite inductive des espaces $C^\infty(G/K)$ et $C_0^\infty(G/K)$ respectivement. Pour plus de détails voir l'article de G. Katz [98] et le travail de F. Bruat [69]. La définition de $S(G)$ est plus compliquée. Pour les groupes de Lie semi-simples voir [94].

12.2. Groupes compacts. Soit G un groupe compact non commutatif. L'ensemble $\hat{G}$ est dans ce cas discret. La transformation de Fourier fait correspondre à chaque fonction f sur G la fonction opératoire $\tilde{f}$ sur $\hat{G}$. Vu que toutes les représentations irréductibles du groupe G sont de dimension finie, on peut considérer que $\tilde{f}$ prend au point $\lambda \in \hat{G}$ la valeur $\tilde{f}(\lambda) \in \mathrm{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbf{C})$, où $n(\lambda)$ est la dimension de la représentation T_λ de la classe λ. Il est naturel de se poser la question suivante: quelle sera l'image d'une classe quelconque de fonctions sur G (ou d'une variante de son algèbre de groupe) engendrée par la transformation de Fourier?

Il est plus aisé de répondre à cette question pour le cas de l'espace $L^2(G, dg)$.

Désignons par $L^2(\hat{G})$ l'ensemble de toutes les fonctions matricielles sur G possédant les propriétés:

1) $$\varphi(\lambda) \in \mathrm{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbf{C}) \text{ pour tout } \lambda \in \hat{G},$$

2) $$\sum_{\lambda \in \hat{G}} n(\lambda) \operatorname{tr} [\varphi(\lambda)^* \varphi(\lambda)] < \infty.$$

Il est évident que $L^2(\hat{G})$ est un espace hilbertien par rapport au produit scalaire

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} n(\lambda) \operatorname{tr} [\varphi_1(\lambda) \varphi_2(\lambda)^*].$$

Théorème 1. *La transformation de Fourier se prolonge à une application isométrique de l'espace $L^2(G, dg)$ sur l'espace $L^2(\hat{G})$.*

La démonstration découle immédiatement des relations d'orthogonalité pour les éléments matriciaux des représentations irréductibles d'un groupe compact (voir 9.2).

Il n'est pas difficile de décrire également l'image de la C^*-algèbre du groupe G. Rappelons que, par définition de l'algèbre $C^*(G)$ l'application $f \to \tilde{f}(\lambda)$, pour chaque $\lambda \in \hat{G}$, se prolonge à une *-représentation de $C^*(G)$, dont l'image est un anneau matriciel complet $\mathrm{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbf{C})$. D'autre part, l'application de $C^*(G)$ qui apparaît dans $\prod_{\lambda \in \hat{G}} \mathrm{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbf{C})$ est alors une inclusion isométrique de $C^*(G)$ dans la C^*-algèbre des fonctions matricielles bornées sur $\hat{G}$.

Théorème 2. *L'image de $C^*(G)$ dans $\prod_{\lambda \in \hat{G}} \mathrm{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbf{C})$ se compose de toutes les fonctions matricielles bornées φ sur $\hat{G}$, qui satisfont à la condition suivante:*

il existe une constante $c = c(\varphi)$, telle que, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$\| \varphi(\lambda) - c \cdot 1 \| < \varepsilon$$

est satisfaite pour tous les $\lambda \in \hat{G}$, sauf, peut-être, pour un nombre fini de λ.

Autrement dit, l'image de $C^*(G)$ est engendrée par la fonction $\varepsilon(\lambda) = 1_{n(\lambda)}$ et les fonctions qui tendent vers 0 à l'infini.

Démonstration. Soit $C^*(\hat{G})$ l'algèbre des fonctions matricielles bornées qui satisfont à la condition du théorème 2.

Problème 1. Démontrer que $C^*(\hat{G})$ est une C*-algèbre par rapport à la norme

$$\| \varphi \| = \sup_{\lambda \in \hat{G}} \| \varphi(\lambda) \|$$

et aux opérations de somme, de produit et d'involution, définies dans chaque point.

Vu que l'algèbre $C^*(G)$ est engendrée par les fonctions de $C(G)$ et par l'unité e adjointe, il suffit de démontrer que les images de $C(G)$ et de e sont contenues dans $C^*(\hat{G})$ et y engendrent un sous-ensemble dense. L'image de e sera la fonction $\varepsilon(\lambda) = 1_{n(\lambda)}$. Elle appartient évidemment à $C^*(\hat{G})$ (il suffit de poser $c(\varepsilon) = 1$). L'espace $C(G)$ est contenu dans $L^2(G)$. D'après le théorème 1, l'image $\tilde{f}$ de chaque fonction $f \in L^2(G)$ est contenue dans $L^2(\hat{G})$ et satisfait, par conséquent, à la condition du théorème 2, si l'on pose $c(\tilde{f}) = 0$.

Il suffit de vérifier que l'image de $C^*(G)$ est dense dans $C^*(\hat{G})$.

Problème 2. Soit χ_λ le caractère de la représentation T_λ de la classe λ, et λ^*, la classe de la représentation T^*_λ. Démontrer que

$$\hat{\chi}_\lambda(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \lambda^*, \\ n(\lambda)^{-1} \cdot 1_{n(\lambda)} & \text{si } \mu = \lambda^*. \end{cases}$$

Problème 3. L'image de $L^1(G)$ dans $C^*(\hat{G})$ contient toutes les fonctions nulles partout sauf dans un ensemble fini de points.

Indication. Il suffit de considérer le cas d'un point quelconque.

L'assertion concernant la densité découle manifestement du problème 3. Le théorème est démontré.

Pour d'autres propriétés de la transformation de Fourier liées aux espaces $L^p(G, dg)$, à l'espace de Schwartz $S(G)$ et autres voir le livre de Hewitt et Ross [33], cité dans **12.1**. Remarquons seulement que la théorie correspondante est bien moins développée que dans le cas commutatif.

Pour les groupes non commutatifs G, l'ensemble $\hat{G}$ n'est plus nécessairement un groupe: l'opération de produit tensoriel n'est pas, en général, fermée dans la classe des représentations irréductibles. Néanmoins, on peut définir dans $\hat{G}$ une certaine structure supplémentaire permettant de retrouver ensuite le groupe G donné.

Soit $\Pi(G)$ la catégorie de toutes les représentations de dimension finie du groupe compact G. En outre des opérations de catégorie usuelles, on peut définir dans $\Pi(G)$ le produit tensoriel de deux objets quelconques et une involution faisant correspondre à la représentation $T \in \mathrm{Ob}\Pi(G)$ la représentation conjuguée T^*.

Nous considérerons la catégorie $\Pi(G)$ avec l'opération de produit tensoriel et d'involution, comme l'objet dual au groupe G. Dans le cas où G est commutatif, l'objet dual dans ce sens se retrouve entièrement d'après la structure de groupe dans $\hat{G}$. Dans le cas général, pour retrouver $\Pi(G)$, il faut se donner outre l'ensemble $\hat{G}$ l'involution $\tau: [T] \to [T^*]$ sur $\hat{G}$, et pour $\lambda, \mu \in \hat{G}$ quelconques l'isomorphisme de l'espace

$$L(T_\mu) \otimes L(T_\nu) \approx L(T_\mu \otimes T_\nu)$$

sur une somme directe de la forme

$$\oplus N^{\nu}_{\lambda,\,\mu} L\,(T_{\nu}),$$

où $L\,(T)$ désigne l'espace de la représentation T, et $N^{\nu}_{\lambda,\,\mu}$ la multiplicité de la composante irréductible de T_{ν} dans la décomposition du produit $T_{\lambda} \otimes T_{\mu}$.

Montrons maintenant comment retrouver à partir de l'objet dual le groupe donné G.

Appelons *représentation de la catégorie* $\Pi\,(G)$ toute fonction φ non nulle sur Ob $\Pi\,(G)$, qui prend au point $T \in$ Ob $\Pi\,(G)$ des valeurs dans End $L\,(T)$ et satisfait aux conditions:

1) $A\varphi\,(T_1) = \varphi\,(T_2)\,A$, quel que soit $A \in \mathscr{C}\,(T_1,\ T_2)$,

2) $\varphi\,(T_1 \otimes T_2) = \varphi\,(T_1) \otimes \varphi\,(T_2)$.

P r o b l è m e 4. Démontrer que chaque représentation φ de la catégorie $\Pi\,(G)$ possède les propriétés suivantes:

3) $\varphi\,(T_1 + T_2) = \varphi\,(T_1) \oplus \varphi\,(T_2)$,

4) $\varphi\,(T^*) = [\varphi\,(T)^*]^{-1}$.

I n d i c a t i o n. Pour déduire 3), mettre dans l'égalité 1) au lieu de A le projecteur de $L\,(T_1 + T_2) \approx L\,(T_1) \oplus L\,(T_2)$ sur $L\,(T_1)$ parallèle à $L\,(T_2)$. Pour obtenir 4) recourir à l'isomorphisme $L\,(T)^* \otimes L\,(T) \approx$ End $L\,(T)$.

L'ensemble $\Gamma\,(\Pi\,(G))$ de toutes les représentations de la catégorie $\Pi\,(G)$ peut être muni d'une opération de multiplication ($\varphi_1\varphi_2\,(T) = \varphi_1\,(T)\cdot\varphi_2\,(T)$) et d'une topologie ($\varphi_\alpha \to \varphi$ si $\varphi_\alpha\,(T) \to \varphi\,(T)$, quel que soit $T \in$ Ob $\Pi\,(G)$).

P r o b l è m e 5. Démontrer que par rapport aux opérations introduites, l'ensemble $\Gamma\,(\Pi\,(G))$ est un groupe topologique compact.

I n d i c a t i o n. Démontrer que $\Gamma\,(\Pi\,(G))$ est un sous-groupe fermé du groupe compact de toutes les fonctions sur Ob $\Pi\,(G)$ qui prennent au point T une valeur dans le groupe des opérateurs unitaires de l'espace $L\,(T)$. (Rappelons que chaque représentation de dimension finie du groupe G est unitaire.)

T h é o r è m e 1 (T a n n a k a). *Soit G un groupe compact et φ_g une représentation de la catégorie* $\Pi\,(G)$ *définie par la formule*

$$\varphi_g\,(T) = T\,(g).$$

Alors, l'application $g \mapsto \varphi_g$ est un isomorphisme des groupes topologiques G et $\Gamma\,(\Pi\,(G))$.

D é m o n s t r a t i o n. Montrons que si $T \in$ Ob $(\Pi\,(G))$ et le vecteur $\xi \in L\,(T)$ est invariant par rapport aux opérateurs $T\,(g)$, $g \in G$, ce vecteur est alors également invariant par rapport à l'opérateur $\varphi\,(T)$, $\varphi \in \Gamma\,(\Pi\,(G))$. En effet, soit T_0 une représentation triviale de dimension 1 de G. L'opérateur A d'inclusion de $L\,(T_0)$ dans le sous-espace engendré par le vecteur $\xi \in L\,(T)$ appartient évidemment à $\mathscr{C}\,(T_0,\ T)$. Par conséquent, la condition 1) (voir la

définition des représentations de la catégorie Π (G)) entraîne $\varphi(T)\xi = \varphi(T) A\xi_0 = A\varphi(T_0)\xi_0$, où $\xi_0 \in L(T_0)$.

Problème 6. Démontrer que $\varphi(T_0) = 1$.
Indication. Recourir à la condition 2) et à la relation $T_0 \otimes T_0 \approx \approx T_0$.

Ainsi, $\varphi(T)\xi = A\xi_0 = \xi$, et notre assertion est démontrée.
Supposons maintenant que l'image de G dans $\Gamma(\Pi(G))$ ne coïncide pas avec tout ce groupe. Cela veut dire que, pour un certain $T \in \mathrm{Ob}\,\Pi(G)$ et un certain $\varphi \in \Gamma(\Pi(G))$, l'opérateur $\varphi(T)$ n'appartient pas au groupe $T(G)$. Il existe alors une fonction continue f sur End $L(T)$, qui est nulle sur l'ensemble $T(G)$ et diffère de 0 au point $\varphi(T)$. En considérant une approximation uniforme de cette fonction par un polynôme sur l'ensemble compact $T(G) \cup \{\varphi(T)\}$ et en prenant la moyenne de ce polynôme sur le groupe G, qui agit naturellement sur End $L(T)$, nous arrivons à la conclusion suivante.

Il existe un polynôme P sur End $L(T)$ *invariant par rapport au groupe G et non invariant par rapport au groupe* $\Gamma(\Pi(G))$.

Soit N le degré du polynôme P et S la représentation du groupe G dans l'espace de dimension finie de tous les polynômes de degré $\leqslant N$ sur End $L(T)$. Alors, le vecteur $P \in L(S)$ est un contre-exemple à l'assertion démontrée ci-dessus.

L'image de G coïncide donc avec $\Gamma(\Pi(G))$. Il est, d'autre part, évident que l'application de G dans $\Gamma(\Pi(G))$ est continue. Vu que G est un compact, on peut en déduire que G et $\Gamma(\Pi(G))$ sont homéomorphes. Le théorème est démontré.

Remarquons que nous aurions pu remplacer, dans la démonstration du théorème, la condition de compacité du groupe G par l'algébricité du groupe $T(G)$ pour un assez grand nombre de représentations T[1]).

Il est naturel de poser la question suivante: quelles sont les catégories apparaissant comme objets duaux au groupe compact G?

La réponse est donnée par le

Théorème 2 (M. Krein). *Soit* Π *une certaine catégorie d'espaces vectoriels de dimension finie, munis des opérations de produit tensoriel et d'involution. Pour que cette catégorie soit un objet dual à un certain groupe compact G, il faut et il suffit que l'on ait les conditions suivantes:*

1. *Il existe exactement un seul (à isomorphisme près) objet* $L_0 \in \Pi$ *possédant la propriété*

$$L_0 \otimes L \approx L \text{ quel que soit } L \in \mathrm{Ob}\,\Pi.$$

[1]) Voir A. Rosenberg, Théorèmes de dualité pour groupes et algèbres de Lie. Uspehi Mat. Nauk, XXVI, 6 (1971), 253-254 (en russe).

2. *Chaque objet* $L \in \mathrm{Ob}\,\Pi$ *se décompose en somme d'objets minimaux.*
3. *Si* L_1 *et* L_2 *sont deux objets minimaux, alors l'espace* $\mathrm{Hom}\,(L_1, L_2)$ *est soit de dimension 1 (si* L_1 *et* L_2 *sont isomorphes), soit nul.*

Si ces conditions sont satisfaites, alors $\Pi = \Pi\,(G)$, *où* G *est le groupe de toutes les représentations de la catégorie* Π.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer le théorème 2 de même que de vérifier l'équivalence de ce théorème au théorème classique de dualité de M. Krein, formulé en termes d'algèbre de blocs (voir [44], § 32, numéro 4).

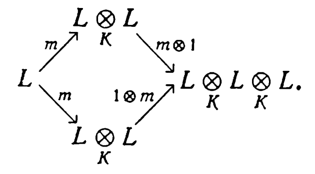
12.3. Groupes annulaires et dualité pour les groupes finis. Quand on compare les dualités de Tannaka-Krein pour les groupes compacts avec la dualité de Pontriaguine pour les groupes commutatifs localement compacts, la différence fondamentale suivante saute aux yeux. Alors que l'objet dual par dualité de Pontriaguine au groupe localement compact commutatif G est égalementun groupe localement compact commutatif, l'objet dual par dualité de Tannaka-Krein au groupe compact G est une certaine catégorie d'espaces vectoriels (ou une algèbre de blocs). Il est donc naturel de poser le problème de définir une notion qui comprendrait, en tant que cas particulier, les groupes ainsi que leurs objets duaux et admettrait l'opération de passage à l'objet dual de la même nature.

Une telle notion a été effectivement trouvée, et elle a permis de construire une théorie de dualité définitive, qui comprend les résultats de Pontriaguine et Tannaka-Krein pour les *groupes finis.* Les généralisations possibles de cette théorie aux groupes infinis seront discutées dans 12.4.

Soit L un espace vectoriel sur le corps K. Nous dirons que L est muni d'une structure de coalgèbre sur K si nous avons l'application K-linéaire

$$m: L \to L \underset{K}{\otimes} L$$

(la comultiplication), pour laquelle on a le diagramme commutatif suivant:



La coalgèbre (L, m) s'appelle commutative, si $m\,(x)$ appartient à $S^2\,(L)$, la partie symétrique du produit $L \otimes L$.

P r o b l è m e 1. Soit $m^* : L^* \underset{K}{\otimes} L^* \to L^*$ l'application conjuguée à m. Démontrer que (L, m) est une coalgèbre (commutative) sur K, si et seulement si L^* est une K-algèbre associative (et commutative) par rapport à l'opération $x \cdot y = m^* (x \otimes y)$, x, $y \in L^*$.

L'espace vectoriel L sur K s'appelle *groupe annulaire* (autres termes: *algèbre de Hopf*, *bigèbre*), si cet espace est muni d'une structure d'algèbre et de coalgèbre, telle que la comultiplication $m: A \to A \otimes A$ est un homomorphisme d'algèbres et la multiplication définit un homomorphisme de coalgèbres: $A \otimes A \to A$.

E x e m p l e 1. Soit G un groupe fini. Dans l'espace $\mathbf{C}[G]$ définissons la multiplication

$$f_1 f_2 (g) = f_1 (g) f_2 (g)$$

et la comultiplication

$$m (f) (g_1, g_2) = f (g_1 g_2).$$

Il est aisé de vérifier que, par rapport à ces opérations, $\mathbf{C}[G]$ est un groupe annulaire.

Remarquons que l'algèbre correspondante est commutative, tandis que la coalgèbre est commutative si et seulement si le groupe G est commutatif.

E x e m p l e 2. Dans ce même espace $\mathbf{C}[G]$ définissons la multiplication comme produit de convolution:

$$f_1 * f_2 (g) = \sum_{h \in G} f_1 (h) f_2 (h^{-1} g),$$

et la comultiplication par la formule

$$m (f) (g_1, g_2) = \begin{cases} f (g_1) & \text{si} \quad g_1 = g_2, \\ 0 & \text{si} \quad g_1 \neq g_2. \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier également que ces opérations font de $\mathbf{C}[G]$ un groupe annulaire. Dans cet exemple la coalgèbre est commutative, tandis que la commutativité de l'algèbre est équivalente à la commutativité du groupe G.

On peut montrer que la structure de groupe annulaire définit ici une certaine algèbre de blocs dans le sens de M. Krein et qu'elle est elle-même déterminée de façon unique par cette algèbre de blocs.

Soit L un groupe annulaire sur K. On appelle groupe annulaire dual à L l'espace $L^* = \mathrm{Hom}_K (L, K)$, muni de l'opération de multiplication et de comultiplication conjuguée aux opérations de comultiplication et de multiplication dans L.

P r o b l è m e 2. Démontrer que les groupes annulaires des exemples 1 et 2 sont duaux l'un à l'autre.

Nous dirons qu'un groupe annulaire correspond à un groupe usuel G, s'il s'obtient de G par la construction de l'exemple 1, et qu'il est dual au groupe usuel G, s'il s'obtient par la construction de l'exemple 2. Il n'est pas difficile d'indiquer un exemple d'un groupe annulaire qui n'appartient ni à l'un, ni à l'autre de ces types. Il suffit de prendre la somme (dans la catégorie des groupes annulaires) de deux groupes annulaires, dont l'un correspond à un groupe non commutatif usuel et l'autre est dual à un tel groupe.

On peut construire des exemples plus intéressants en considérant les extensions des groupes annulaires.

L'étude de ces extensions fut abordée par G. Katz (voir [100], [101]).

Problème 3. Montrer qu'il existe une extension du groupe annulaire L_1 correspondant au groupe usuel $\mathbf{Z}_2$ par un groupe annulaire L_2 correspondant au groupe commutatif usuel $\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2$, qui ne correspond à aucun groupe usuel.

12.4. Autres résultats. Les transformations de Fourier pour les groupes plus généraux que les groupes commutatifs ou compacts sont encore trop peu étudiées. Un des rares résultats d'ordre général est un analogue de la formule de Plancherel pour les groupes localement compacts unimodulaires. Pour les groupes de Lie complexes semi-simples, ce résultat a été obtenu par N. Naimark (on l'appelle « analogue continual du lemme de Shur »). Nous nous bornons à formuler ici ce théorème pour le cas de groupes apprivoisés.

Pour l'énoncé et la démonstration dans le cas général voir les travaux de I. Segal [129] et de M. Mautner [117].

Théorème 1. *Soit G un groupe apprivoisé localement compact unimodulaire à base dénombrable.*

Il existe une mesure μ (que l'on appelle mesure de Plancherel) sur l'espace $\hat{G}$, telle que

$$\int_G |f(g)|^2\,dg = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}\,[\tilde{f}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)^*]\,d\mu(\lambda)$$

quel que soit $f \in L^1(G, dg) \cap L^2(G, dg)$.

La transformation de Fourier se prolonge à une application isométrique de $L^2(G, dg)$ sur l'espace $L^2(\hat{G}, \mu)$ des fonctions opératoires de carré μ-intégrables sur $\hat{G}$, qui prennent au point $\lambda \in \hat{G}$ des valeurs dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_λ.

La démonstration peut se déduire du théorème général de la décomposition des représentations unitaires des groupes apprivoisés (voir 8.4, théorème 3), appliqué à la représentation T du groupe $G \times G$ dans l'espace $L^2(G, dg)$ par la formule

$$[T(g_1, g_2)f](g) = f(g_1^{-1}gg_2). \tag{1}$$

Pour cela, il faut utiliser des faits suivants.

Problème 1. Démontrer que, si G est un groupe apprivoisé, chaque représentation irréductible du groupe $G \times G$ est de la forme

$$T(g_1, g_2) = T_1(g_1) \otimes T_2(g_2),$$

où T_1 et T_2 sont des représentations irréductibles du groupe G.

Indication. Recourir aux propriétés des représentations primaires des groupes apprivoisés (voir problème 3 de 8.4).

Problème 2. Démontrer que la représentation T, donnée par la formule (1), possède un spectre simple.

Indication. Démontrer que si A (respectivement B) est une algèbre de von Neumann engendrée par les translations à gauche (respectivement à droite) dans $L^2(G, dg)$ on a alors $A = B^!$.

Par conséquent, nous avons une décomposition de la forme

$$T = \int_{\hat{G}} \int_{\hat{G}} (T_\lambda \times T_\mu)\, d\nu(\lambda, \mu). \tag{2}$$

Problème 3. Montrer que la mesure ν dans la formule (2) est concentrée sur un sous-ensemble Δ de l'espace $\hat{G} \times \hat{G}$ composé de représentations de la forme $T_\lambda \times T_\lambda^*$.

Indication. Soit C une algèbre de von Neumann, engendrée par les translations à gauche et à droite dans $L^2(G, dg)$. Démontrer que le centre Z de l'algèbre C coïncide avec $A \cap B$ (voir l'indication au problème 2).

Considérons un automorphisme antilinéaire ε de l'espace $L^2(G, dg)$ qui transforme la fonction $f(g)$ dans la fonction $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$. L'assertion du problème découle du fait suivant. Pour chaque opérateur $z \in Z$ on a l'égalité $\varepsilon \cdot z \cdot \varepsilon = z^*$.

La démonstration de ce fait peut être obtenue par approximation de l'opérateur z par les opérateurs $L(\varphi_n) = \int_G \varphi_n(g) L(g)\, dg$, $\varphi_n \in L^1(G, dg)$ et en appliquant les deux membres de l'égalité à démontrer à un vecteur de la forme $f = f_1 * f_2$, $f_i \in L^1(G, dg) \cap L^2(G, dg)$.

Une autre démonstration de la formule de Plancherel que l'on peut trouver dans le livre de Dixmier [15] est basée sur la notion de race dans une C^*-algèbre.

Le problème de la description des C^*-algèbres du groupe G dans le cas, où ce groupe est non compact et non commutatif, est particulièrement intéressant et difficile. Pour certaines classes de groupes on peut réaliser l'algèbre $C^*(G)$ en forme de sous-algèbre de l'algèbre $C^*(\hat{G})$ de toutes les fonctions opératoires sur $\hat{G}$ dont les valeurs au point $\lambda \in \hat{G}$ sont des opérateurs complètement continus dans l'espace H_λ correspondant.

Le cas $G = SL(2, \mathbf{C})$ est entièrement étudié dans l'article de Fell [77]. On y trouvera également de nombreux renseignements utiles sur la structure des C^*-algèbres des fonctions opératoires.

Le principe de dualité fondé sur la notion de groupe annulaire est généralisé dans les travaux de G. Katz [99]. Néanmoins, l'énoncé définitif est ici beaucoup plus compliqué et moins naturel. Pour un exposé modernisé de ces questions voir [134] et [76].

L'étude de la topologie de l'espace G fait naître tout un nombre de questions aussi bien intéressantes que difficiles. Nous avons déjà noté plus haut que pour les groupes localement compacts l'espace $\hat{G}$ est semi-séparé, si et seulement si G est un groupe apprivoisé (voir la démonstration dans le livre de Dixmier cité plus haut [15]).

La propriété dite R-propriété signifie que la représentation unité T_0 est incluse dans le support de la mesure de Plancherel μ sur $\hat{G}$. Comme nous l'avons noté au **9.1**, cette propriété équivaut pour les groupes localement compacts à l'amenabilité de G.

D. Kajdan a récemment découvert une relation intéressante entre les propriétés algébriques du groupe G et la structure topologique du voisinage du point $T_0 \in \hat{G}$.

Théorème 2 (D. Kajdan). *Si G est un groupe discret dénombrable et le point $T_0 \in \hat{G}$ est isolé, alors G possède un nombre fini de générateurs et le groupe quotient par son commutant est fini.*

La démonstration est basée sur la remarque suivante.

Problème 4. Si T_0 est un point isolé de $\hat{G}$ et la famille $\mathscr{S}$ des représentations de G contient faiblement T_0, T_0 est alors une sous-représentation d'une des représentations $S \in \mathscr{S}$.

Le théorème de Kajdan permet d'obtenir de nouveaux renseignements essentiels sur la structure des sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples. Pour un exposé détaillé de ces résultats voir le séminaire Bourbaki [70].

§ 13. REPRÉSENTATIONS INDUITES

La construction d'une représentation induite joue un rôle très important dans la théorie des représentations. Il suffit de dire que les représentations des groupes de transformations dans les espaces de fonctions, de champs vectoriels et tensoriels, d'opérateurs différentiels, et de beaucoup d'autres objets sont des exemples de représentations induites.

Pour de nombreux groupes, toutes ou presque toutes les représentations unitaires irréductibles sont *monomiales*, c'est-à-dire induites par une représentation de dimension 1 d'un certain sous-groupe.

Enfin, l'opération de l'induction elle-même, qui est un foncteur de la catégorie des représentations d'un sous-groupe dans la catégorie des représentations du groupe, est devenue ces dernières années l'objet d'une étude détaillée et fructueuse.

13.1. Représentations induites des groupes finis. Nous commencerons par étudier les fondements algébriques de la notion de représentation induite en nous limitant ici aux représentations de dimension finie des groupes finis.

Soit X un G-espace homogène à droite. L'espace $L(X)$ des fonctions sur X est muni de l'action de la représentation T du groupe G:

$$[T(g)f](x) = f(xg). \tag{1}$$

Fixons le point $x_0 \in X$ et désignons par H le sous-groupe stationnaire de ce point. A chaque fonction $f \in L(X)$ on peut faire correspondre la fonction F sur le groupe G:

$$F(g) = f(x_0 g). \tag{2}$$

P r o b l è m e 1. Démontrer que la formule (2) définit un isomorphisme entre l'espace $L(X)$ et l'espace $L(G, H)$ des fonctions sur G, constantes sur les classes d'équivalence à droite par H. La représentation T est appliquée par cet isomorphisme dans la représentation définie par la formule

$$[T(g)F](g_1) = F(g_1 g). \tag{3}$$

Nous avons ainsi obtenu une sous-représentation de la représentation régulière à droite de G correspondante au sous-espace invariant $L(G, H)$.

Les représentations du type décrit s'appellent parfois *quasi régulières*. La notion de représentation induite s'obtient en généralisant cette construction de la manière suivante.

Soit U la représentation du sous-groupe H dans l'espace de dimension finie V. Désignons par $L(G, H, U)$ l'espace des fonctions vectorielles F sur G à valeurs dans V qui satisfont à la condition

$$F(hg) = U(h)F(g), \quad h \in H. \tag{4}$$

P r o b l è m e 2. Démontrer que l'espace $L(G, H, U)$ est invariant par rapport aux translations à droite par éléments de G et que la formule (3) définit une représentation de G dans $L(G, H, U)$.

La représentation ainsi obtenue s'appelle *induite* (plus exactement *représentation du groupe G induite par la représentation U du sous-groupe H*); on la note Ind (G, H, U) ou simplement Ind U, s'il est clair de quel groupe et de quel sous-groupe il s'agit. Lorsque la forme explicite de U n'est pas connue ou bien est sans importance, on dira simplement que la représentation est *induite à partir du sous-groupe H.*

Si l'on prend pour la représentation induite U la représentation triviale U_0 de dimension 1 du sous-groupe H, on obtient alors pour Ind U une représentation quasi régulière dans l'espace $L(X)$, $X = H\diagdown G$. En particulier, la représentation régulière du groupe G peut s'écrire Ind $(G, \{e\}, U_0)$.

On peut réaliser la représentation induite, de même que la représentation quasi-régulière dans l'espace des fonctions (vectorielles) sur l'espace homogène $X = H\diagdown G$. Pour cela, remarquons que la fonction $F \in L(G, H, U)$ est entièrement définie si l'on connaît

toutes ses valeurs dans un au moins point de chacune des classes d'équivalence Hg. Supposons que nous avons choisi un représentant dans chacune de ces classes. Autrement dit, nous avons une application $s: X \to G$, telle que $p \circ s = 1$, où p est la projection naturelle de G sur $H \backslash G = X$.

Problème 3. Chaque élément $g \in G$ s'écrit de façon unique sous la forme $g = h \cdot s(x)$, où $h \in H$, $x \in X$.

Indication. Poser $x = x_0 g$.

Faisons correspondre à chaque fonction $F \in L(G, H, U)$ la fonction vectorielle f sur X à valeurs dans V:

$$f(x) = F(s(x)). \tag{5}$$

Problème 4. Démontrer que l'application (5) est un isomorphisme entre $L(G, H, U)$ et l'espace $L(X, V)$ de toutes les fonctions vectorielles sur X à valeurs dans V. La représentation T est envoyée par cet isomorphisme dans la représentation définie par la formule

$$[T(g) f](x) = A(g, x) f(xg), \tag{6}$$

où la fonction $A(g, x)$ se définit par les égalités

$$A(g, x) = U(h), \tag{7}$$

$$s(x) g = hs(xg). \tag{8}$$

Indication. Recourir à la décomposition du problème 3 en l'appliquant à l'élément $s(x) g \in G$.

Par conséquent, les opérateurs d'une représentation induite sont la superposition d'une translation et de la multiplication par une fonction opératoire.

On peut montrer que cette propriété est caractéristique des représentations induites.

Problème 5. Démontrer que chaque représentation de la forme (6) est équivalente à une représentation induite à partir du sous-groupe H.

Indication. Démontrer que la fonction $A(g, x)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$A(g_1, x) A(g_2, xg_1) = A(g_1 g_2, x), \tag{9}$$

dont la solution générale est de la forme

$$A(g, x) = B(x)^{-1} U(h) B(xg),$$

où B est une certaine fonction opératoire sur X à valeurs dans Aut V et $h \in H$ se définit par l'égalité (8).

Remarquons qu'une fonction A vérifiant la condition (9) peut être interprétée comme un cocycle de dimension 1 du groupe G à coefficients dans Aut V, et le problème 5, comme l'affirmation que chaque cocycle est cohomologique à un cocycle de la forme (7).

Nous donnerons ci-dessous sous forme de problèmes certaines propriétés simples mais fort importantes des représentations induites.

Problème 6. Démontrer que $U_1 \sim U_2$ entraîne $\mathrm{Ind}\ U_1 \sim \mathrm{Ind}\ U_2$. (Par conséquent, l'opération d'induction est bien définie pour les classes d'équivalence des représentations.)

Indication. Si $C \in \mathscr{C}(U_1, U_2)$, l'application $F \mapsto CF$ agit de $L(G, H, U_1)$ dans $L(G, H, U_2)$ et appartient à $\mathscr{C}(\mathrm{Ind}\ U_1, \mathrm{Ind}\ U_2)$.

Problème 7. Démontrer l'équivalence

$$\mathrm{Ind}\,(U_1 + U_2) \sim \mathrm{Ind}\ U_1 + \mathrm{Ind}\ U_2.$$

Corollaire. *Si* Ind *U est irréductible, U l'est aussi.*

Problème 8 (théorème de transitivité de l'induction). Si H est un sous-groupe de G, et K un sous-groupe de H, alors pour chaque représentation U du sous-groupe K, nous avons l'équivalence

$$\mathrm{Ind}\,(G, H, \mathrm{Ind}\,(H, K, U)) \sim \mathrm{Ind}\,(G, K, U)$$

ou symboliquement

$$\mathrm{Ind}_H^G\, \mathrm{Ind}_K^H = \mathrm{Ind}_K^G,$$

où $\mathrm{Ind}\ _K^G$ signifie l'opération de passage de U à $\mathrm{Ind}\,(G, H, U)$. (Notons que cette opération est un foncteur covariant de la catégorie des représentations de H dans la catégorie des représentations de G.)

Indication. Soit V l'espace de la représentation U. Considérer l'application de $L(G, K, V)$ dans $L(G, H, L(H, K, V))$ suivant la formule

$$f \mapsto F, \quad \text{où} \quad F(g, h) = f(hg).$$

Problème 9 (formule de Frobenius). Démontrer que le caractère d'une représentation induite peut être calculé suivant la formule

$$\chi_{\mathrm{Ind}\,U}(g) = \sum_{x \in X} \chi_U(s(x)^{-1} g s(x)), \tag{10}$$

où le caractère χ_U de la représentation U dans le membre droit de l'égalité est supposé prolongé, par valeurs nulles, du sous-groupe H au groupe tout entier.

Indication. Recourir aux formules (6)-(8).

Corollaire. *Si H est un sous-groupe invariant de G, le caractère de chaque représentation induite à partir de H s'annule en dehors de H.*

La relation suivante est d'importance fondamentale pour la majorité des calculs liés aux représentations induites des groupes finis.

Théorème 1 (dualité de Frobenius). *Soient T la représentation du groupe G, U la représentation du sous-groupe H. Alors*

$$c(T, \mathrm{Ind}\ U) = c(T\,|_H, U). \tag{11}$$

(Ici nous avons noté $T\,|_H$ la restriction de la représentation T au sous-groupe H.)

La démonstration de ce théorème se déduit facilement de la formule de Frobenius et de l'égalité 3 de **11.1**.

Une autre méthode consiste à construire un isomorphisme entre les espaces $\mathscr{C}(T, \text{Ind } U)$ et $\mathscr{C}(T|_H, U)$. Supposons que la représentation T agisse dans l'espace W et U dans l'espace V. Alors, à chaque opérateur $A \in \text{Hom}(W, L(G, H, V))$ on peut faire correspondre l'opérateur $B \in \text{Hom}(W, V)$ en posant :

$$B(w) = [A(w)](x_0), \quad w \in W. \tag{12}$$

Problème 10. Démontrer que l'application définie par l'égalité (12) est un isomorphisme entre $\mathscr{C}(T, \text{Ind } U) \subset \text{Hom}(W, L(G, H, V))$ et $\mathscr{C}(T|_H, U) \subset \text{Hom}(W, V)$.

Notons quelques cas particuliers de la dualité de Frobenius largement utilisés dans les applications :

Corollaire 1. *Si T est une représentation irréductible de G et U une représentation irréductible de H, alors T apparaît dans la décomposition de* Ind *U le même nombre de fois que U dans la décomposition de $T|_H$.*

Corollaire 2. *La composante irréductible de T apparaît dans la décomposition de la représentation quasi régulière correspondante au sous-groupe H un nombre de fois égal au nombre d'invariants linéairement indépendants du sous-groupe H dans l'espace W de la représentation T.*

Exemple. Considérons la représentation T du groupe $G \times G$ dans l'espace $L(G)$ définie par la formule

$$[T(g_1, g_2) f](g) = f(g_1^{-1} g g_2).$$

Il est évident que c'est une représentation quasi régulière qui correspond au sous-groupe diagonal $\Delta \in G \times G$ composé de tous les couples de la forme (g, g). Chaque représentation irréductible de $G \times G$ est de la forme $T_1 \times T_2$: $(g_1, g_2) \to T_1(g_1) \otimes T_2(g_2)$, où T_1 et T_2 sont des représentations irréductibles de G. D'après le corollaire 2 du théorème 1, la représentation $T_1 \times T_2$ apparaît dans la décomposition de T un nombre de fois égal au nombre de vecteurs Δ-invariants pour la représentation $T_1 \times T_2$. La restriction de $T_1 \times T_2$ à Δ est, comme on le voit, le produit tensoriel $T_1 \otimes T_2$ des représentations T_1 et T_2 du groupe G.

D'après le problème 5 de **7.1**, le nombre cherché est égal à $c(T_1, T_2^*)$, c'est-à-dire à l'unité, si $T_1 \sim T_2^*$, et à 0 dans le cas contraire. Par conséquent, la représentation T possède un spectre simple et ses composantes irréductibles sont de la forme $T_k \times T_k^*$, où T_k parcourt l'ensemble $\hat{G}$.

La dualité de Frobenius est une propriété caractéristique de la représentation induite, qui permet de décrire cette représentation en termes de la théorie des catégories.

Notons $\Pi(G, K)$ la catégorie des représentations linéaires de dimension finie sur le corps K d'un groupe fini G.

Supposons donnés un sous-groupe $H \subset G$ et sa K-représentation U. Considérons le foncteur contravariant F de $\Pi(G, K)$ dans la catégorie des espaces vectoriels sur le corps K:

$$F(T) = \mathscr{C}(T|_H, U).$$

D'après le théorème 1, ce foncteur peut se mettre sous la forme

$$F(T) = \mathscr{C}(T, \operatorname{Ind} U).$$

Par conséquent, le foncteur F est représentatif et la représentation induite Ind U est l'objet représentatif de ce foncteur.

Remarquons que dans le cas de dimension infinie, le foncteur F n'est généralement pas représentatif. Par conséquent, les tentatives d'appliquer le théorème de dualité de Frobenius à ce cas nécessitent une extension de la catégorie initiale des représentations. Nous discuterons cette question en plus de détails par la suite.

On peut donner une autre définition de la représentation induite en termes de la théorie des catégories. A savoir: la représentation induite Ind U est un objet universel dans la catégorie suivante.

Considérons pour une représentation donnée U du sous-groupe H dans l'espace V toutes les applications $\varphi: V \to L$, où L est l'espace de la représentation du groupe G et φ est permutable à l'action du sous-groupe H. Ces applications forment une catégorie, si l'on définit le morphisme de φ dans φ' comme étant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & L \\ & \searrow^{\varphi'} & \downarrow \varepsilon \\ & & L' \end{array},$$

où ε est une application permutable à l'action du groupe G.

Problème 11. Démontrer que, dans la catégorie décrite ci-dessus, l'objet initial universel sera l'application φ_0 de l'espace V dans l'espace $L(G, H, U)$ de la représentation induite Ind U, si φ_0 est définie par la formule

$$(\varphi_0(v))(g) = \begin{cases} U(g)v, & \text{si} \quad g \in H, \\ 0, & \text{si} \quad g \bar{\in} (H). \end{cases}$$

Indication. Si $\varphi: V \to L$ est un objet quelconque de notre catégorie, l'application cherchée

$$\varepsilon: L(G, H, U) \to L$$

est donnée par la formule

$$\varepsilon(F) \to \sum_{H \diagdown G} T(g^{-1})\, \varphi(F(g))$$

(l'expression dans le membre droit est constante sur les classes d'équivalence à droite de G par H).

Donnons, enfin, une construction explicite de l'espace de la représentation induite, comme module sur l'algèbre de groupe $K[G]$. Soit U la représentation du sous-groupe H dans l'espace V. Alors V est un $K[H]$-module à gauche. Examinons le produit tensoriel $K[G] \underset{K[H]}{\otimes} V$, où $K[G]$ est considéré comme $K[G]$-module à gauche et $K[H]$-module à droite. Ce produit sera alors un $K[G]$-module à gauche.

Problème 12. Démontrer que $K[G]$-module $K[G] \underset{K[H]}{\otimes} V$ correspond à la représentation induite Ind (G, H, V).

Indication. Vérifier que l'application $\varphi_1 : V \to K[G] \underset{K[H]}{\otimes} V$, définie par l'égalité $\varphi_1(v) = 1 \otimes v$, est un objet universel, et recourir au problème précédent.

Une autre méthode consiste à établir directement un isomorphisme entre $K[G] \underset{K[H]}{\otimes} V$ et $L(G, H, U)$. Cet isomorphisme fait correspondre à la fonction $F \in L(G, H, U)$ l'élément

$$\sum_{H \diagdown G} \delta_{g^{-1}} \otimes F(g) \in K[G] \underset{K[H]}{\otimes} V.$$

L'application inverse envoie l'élément $\delta_g \otimes v$ de $K[G] \underset{K[H]}{\otimes} V$ dans la fonction

$$F(g_1) = \begin{cases} U(g_1 g) v & \text{si } g_1 g \in H, \\ 0 & \text{si } g_1 g \overline{\in} H. \end{cases}$$

Les deux dernières définitions de la représentation induite peuvent être transformées à l'aide de l'« inversion des flèches », en définition de l'objet dual, que l'on appelle représentation *co-induite* (un autre terme: *module pro-induit*). On peut néanmoins montrer que, dans le cas d'une algèbre $K[G]$ semi-simple, l'opération de co-induction coïncide avec l'opération d'induction.

13.2. Représentations unitaires induites des groupes localement compacts. La construction de la représentation induite, décrite dans **13.1** pour les groupes finis, peut être appliquée aux groupes localement compacts sans modifier pour cela plusieurs (mais pas toutes) propriétés principales. L'étude détaillée de cette construction étant effectuée dans les travaux de G. Mackey, nous appellerons donc les représentations induites ainsi obtenues induites dans le sens de Mackey.

Considérons d'abord, comme dans le cas fini, deux réalisations de la représentation induite: 1) dans l'espace des fonctions vectorielles sur tout le groupe G, qui se transforment suivant la représentation donnée pour les translations à gauche par éléments du sous-groupe H; 2) dans l'espace des fonctions vectorielles sur l'espace homogène à droite $X = H \diagdown G$. Pour les représentations de dimension infinie le passage de l'une des réalisations à l'autre est loin

d'être aussi évident que dans le cas fini. Néanmoins, du critère d'inductibilité, que nous exposerons un peu plus loin on peut déduire l'équivalence des deux points de vue.

Considérons d'abord la première réalisation. Soient G un groupe localement compact, H — son sous-groupe fermé et U_0 une certaine représentation (pas nécessairement unitaire) du sous-groupe H dans l'espace hilbertien V. Introduisons, comme nous l'avons fait au **13.1**, l'espace $L(G, H, U_0)$ des fonctions vectorielles mesurables F sur G, à valeurs dans V, qui satisfont à la condition

$$F(hg) = U_0(h) F(g), \quad h \in H, \quad g \in G. \tag{1}$$

Il est évident que cet espace est invariant par rapport aux translations à droite de G.

Posons la question suivante: quelles conditions faut-il vérifier pour pouvoir introduire dans $L(G, H, U_0)$ un produit scalaire G-invariant de la forme

$$(F_1, F_2) = \int_G (F_1(g), F_2(g))_V \, d\mu(g), \tag{2}$$

où μ est une certaine mesure sur le groupe G?

P r o b l è m e 1. Vérifier que pour la mesure μ de la forme $\rho(g)\, d_r g$, la condition de G-invariance du produit scalaire (2) se réduit à la suivante: la valeur $\int_H \| U_0(h)\xi \|_V^2 \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} \rho(hg)\, d_r h$ ne dépend pas de g, quel que soit $\xi \in V$.

Nous considérons la représentation U_0 de la forme particulière

$$U_0(h) = \left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right]^{1/2} U(h), \tag{3}$$

où U est une représentation unitaire de H. Alors, la condition du problème 1 se transforme dans l'assertion suivante: la valeur de $\int_H \rho(hg)\, d_r h$ ne dépend pas de g.

P r o b l è m e 2. Démontrer qu'il existe sur le groupe G une fonction continue non négative ρ, telle que

$$\int_H \rho(hg)\, d_r h \equiv 1 \tag{4}$$

et supp ρ a une intersection compacte avec chacune des classes d'équivalence Hg.

I n d i c a t i o n. Pour une solution détaillée voir le traité de Bourbaki ([7], chapitre VII, § 2.4).

Soit s une application mesurable de X dans G qui possède la propriété $s(Hg) \in Hg$, et ν_s la mesure correspondante sur X (voir **9.1**).

P r o b l è m e 3. Soit U_0 une représentation de la forme (3) et ρ une fonction sur G qui satisfait aux conditions du problème 2; alors, pour chaque fonction $F \in L(G, H, U_0)$ nous avons l'égalité

$$\int_G \| F(g) \|_V^2 \rho(g) \, d_r g = \int_X \| F(s(x)) \|_V^2 \, d\nu_s(x). \tag{5}$$

I n d i c a t i o n. Recourir à la formule (6′) de **9.1**.

C o r o l l a i r e. Le membre gauche de l'égalité (5) ne dépend pas du choix de la fonction ρ et le membre droit du choix de l'application s.

Donnons maintenant la définition d'une représentation induite. Soit U une représentation unitaire de H dans l'espace V. Définissons la représentation U_0, liée à la représentation U par l'égalité (3) et introduisons dans $L(G, H, U_0)$ la mesure dont le carré est donné par la formule (5). L'espace hilbertien ainsi obtenu sera noté $L^2(G, H, U)$. La représentation unitaire T, qui agit dans $L^2(G, H, U)$ suivant la formule

$$[T(g) F](g_1) = F(g_1 g) \tag{6}$$

s'appelle *représentation induite à partir de U dans le sens de Mackey*; notons-la, de même que dans **13.1**, Ind (G, H, U) ou Ind U tout simplement.

Rappelons que pour les groupes topologiques le terme «représentation» signifie toujours « représentation continue ». Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si U était continue, Ind U le sera aussi. Pour cela, il vaut mieux utiliser le problème 1 de **7.2** et le fait suivant.

P r o b l è m e 4. Démontrer que l'ensemble des fonctions de la forme

$$F(g) = \int_H U_0(h) \varphi(h^{-1} g) \, d_l h$$

est dense dans $L^2(G, H, U)$, si φ est une fonction vectorielle continue sur G à support compact.

Considérons maintenant une autre réalisation de cette représentation. Fixons une application mesurable $s: X \to G$ qui possède la propriété $s(Hg) \in Hg$. A chaque fonction $F \in L^2(G, H, U)$ faisons correspondre la fonction $f(x) = F(s(x))$. Il est évident que F se retrouve d'une façon unique à partir de f.

De l'égalité (5), on peut déduire que l'application $F \to f$ donne un isomorphisme de $L^2(G, H, U)$ sur l'espace $L^2(X, \nu_s, V)$ des

fonctions vectorielles sur X, à valeurs dans V, dont la norme pour fa mesure ν_s est de carré sommable.

P r o b l è m e 5. Démontrer que la représentation induite (6) est transformée par l'isomorphisme ci-dessus dans la représentation

$$[T(g) f](x) = A(g, x) f(xg), \tag{7}$$

où la fonction opératoire $A(g, x)$ est donnée par l'égalité

$$A(g, x) = U_0(h) \tag{8}$$

dont l'élément $h \in H$ se définit d'après la relation

$$s(x) g = hs(xg). \tag{9}$$

I n d i c a t i o n. Faire appel à la forme explicite de F en termes de f:

$$F(hs(x)) = U_0(h) f(x), \quad h \in H, \quad u \in X.$$

La réalisation obtenue suggère que la construction d'une représentation induite peut être généralisée de la manière suivante. Soit X un G-espace à droite muni d'une mesure quasi invariante μ. Considérons la famille des opérateurs $T(g)$, $g \in G$ définis par la formule (7) dans l'espace $L^2(X, \mu, V)$, où V est un espace hilbertien, et soit $A(g, x)$ une fonction sur $G \times X$ à valeurs dans End V.

Pour avoir l'égalité $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$, il faut et il suffit que l'on ait, pour g_1 et g_2 de G quelconques, l'égalité

$$A(g_1, x) A(g_2, xg_1) = A(g_1 g_2, x) \tag{10}$$

pour presque tous les $x \in X$ par rapport à la mesure μ. L'opérateur $T(g)$ sera unitaire si, pour chaque $g \in G$, les opérateurs

$$B(g, x) = \left[\frac{d\mu(xg)}{d\mu(x)}\right]^{-1/2} A(g, x)$$

sont unitaires dans l'espace V pour presque tous les $x \in X$.

P r o b l è m e 6. Démontrer que la fonction opératoire $B(g, x)$, de même que $A(g, x)$, satisfait à la condition (10).

I n d i c a t i o n. Faire appel à l'identité

$$\frac{d\mu(xg_1g_2)}{d\mu(xg_1)} \frac{d\mu(xg_1)}{d\mu(x)} = \frac{d\mu(xg_1g_2)}{d\mu(x)}.$$

Il est aisé de voir que la fonction $B(g, x)$ est un cocycle de dimension 1 du groupe G à coefficients dans le groupe Γ des fonctions opératoires unitaires mesurables sur X (plus précisément, des classes de fonctions coïncidant presque partout pour la mesure μ).

P r o b l è m e 7. Démontrer que si les cocycles B_1 et B_2 sont cohomologiques, c'est-à-dire

$$B_1(g, x) = C(x)^{-1} B_2(g, x) C(xg)$$

pour un certain $C \in \Gamma$, alors les représentations correspondantes T_1 et T_2 sont unitairement équivalentes.

I n d i c a t i o n. L'équivalence cherchée est réalisée par l'opérateur unitaire C dans $L^2(X, \mu, V)$, qui agit suivant la formule

$$(Cf)(X) = C(x) f(x).$$

Ainsi, nous en sommes venus à la question de la structure des cohomologies $H^1(G, \Gamma)$.

Si l'action du groupe G sur X satisfait aux conditions du théorème de Glimm (voir **9.1**), alors l'étude des cohomologies $H^1(G, \Gamma)$ peut être réduite à un problème analogue dans le cas où $X = H \diagdown G$ est un espace homogène.

Il se trouve que sur l'espace homogène $X = H \diagdown G$ chaque cocycle est cohomologique à un cocycle de forme particulière, donnée par les formules (8) et (9) et, par conséquent, se définit par la représentation unitaire du sous-groupe H. Cette assertion est essentiellement équivalente à la suivante: chaque représentation de la forme (7) sur l'espace homogène $X = H \diagdown G$ est induite dans le sens de Mackey à partir du sous-groupe H. Cette dernière assertion découle du critère d'inductibilité cité plus loin (voir p. 216).

Si la mesure μ sur X est ergodique par rapport à G (voir **9.1**), mais n'est concentrée sur aucune orbite de ce groupe dans X, alors les classes de cohomologie $H^1(G, \Gamma)$ peuvent être interprétées comme classes des représentations unitaires d'un sous-groupe dit « virtuel » du groupe G.

L'étude des sous-groupes virtuels fut commencée par G. Mackey (voir son article de revue [115]). Il est intéressant de noter que les sous-groupes virtuels d'un groupe commutatif peuvent posséder des représentations irréductibles de dimension >1. Voir à ce sujet l'article de l'auteur « Systèmes dynamiques, facteurs et représentations des groupes», Uspehi Mat. Naouk, v. 22, n° 5 (1967), 67-80 (en russe). D'autres résultats sont exposés dans l'article de R. Izmaguilov [95].

Citons quelques propriétés de l'opération d'induction dans le sens de Mackey. De même que dans le cas fini, on vérifie que cette opération appliquée aux classes de représentations équivalentes ne modifie pas la décomposition en sommes (y compris en sommes continues) et satisfait au principe de la transitivité de l'induction (voir problèmes 6-8 de **13.1**).

La dualité de Frobenius, sous la forme énoncée au corollaire 1 du théorème 1 dans **13.1**, reste vraie pour les groupes compacts mais, en général, ne l'est plus pour les groupes localement compacts. Nous revenons à l'étude plus détaillée de cette question dans **13.5**.

Dans de nombreux cas, il importe de savoir sous quelles conditions la représentation donnée T du groupe G est induite, dans le sens de Mackey à partir d'un sous-groupe fermé H. Pour pouvoir énoncer le critère d'inductibilité, nous introduirons la notion de « représentation d'un G-espace ». Par définition, on appelle *représentation*

unitaire d'un G-espace à droite X dans un espace hilbertien L, le couple (T, P), où T est une représentation unitaire du groupe G dans L, et P la $*$-représentation de l'algèbre $C_0(X)$ des fonctions continues finies sur X (avec la multiplication usuelle et la conjugaison complexe dans le rôle d'involution), si T et P sont liées par la relation

$$T(g)\,P(f)\,T(g^{-1}) = P(R(g)\,f), \tag{11}$$

où

$$[R(g)\,f](x) = f(xg). \tag{12}$$

Théorème 1 (critère d'inductibilité). *Pour qu'une représentation unitaire T du groupe G soit induite dans le sens de Mackey à partir d'un sous-groupe fermé $H \subset G$, il faut et il suffit qu'elle se prolonge à une représentation unitaire de l'espace homogène $X = H \setminus G$.*

Avant de démontrer le théorème, énonçons encore deux formulations équivalentes.

1. La représentation P de l'algèbre $C_0(X)$ peut être remplacée par la mesure Δ dite projetante qui fait correspondre à chaque sous-ensemble borélien $E \subset X$ le projecteur orthogonal $\Delta(E)$ et possède les propriétés

$$\Delta(E_1 \cap E_2) = \Delta(E_1)\,\Delta(E_2),$$

$$\Delta\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(E_k), \qquad \text{où } E_i \cap E_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j,$$

$$P(f) = \int_X f(x)\,\Delta(dx) \qquad \text{pour } f \in C_0(X).$$

La condition (11), en termes de la mesure Δ, signifie que

$$T(g)\,\Delta(E)\,T(g)^{-1} = \Delta(Eg). \tag{13}$$

Une telle mesure projetante s'appelle *système d'imprimitivité* par rapport à T. Ainsi, le *critère d'inductivité de la représentation T du sous-groupe H est l'existence d'un système d'imprimitivité sur $X = H \setminus G$ par rapport à T.* C'est sous cette forme que ce critère fut d'abord obtenu par G. Mackey.

2. Au lieu de la représentation unitaire (T, P) du G-espace X, on peut considérer la $*$-représentation Φ d'une certaine algèbre auxiliaire $\mathfrak{A}$ (analogue de l'algèbre de groupe). Cette algèbre se construit de la manière suivante:

Soit $C_0(X \times G)$ l'espace vectoriel topologique des fonctions continues finies $\alpha(x, g)$, $x \in X$, $g \in G$. (La convergence dans cet espace signifie convergence uniforme, avec la condition supplémentaire que les supports de toutes les fonctions considérées sont contenus dans un seul compact $K \subset X \times G$.)

P r o b l è m e 8. Il existe une application continue linéaire unique Φ: $C_0(X \times G) \to \operatorname{End} V$ qui sur les fonctions de la forme $\alpha(x, g) = u(x) v(g)$ est définie par la formule

$$\Phi(\alpha) = P(u) T(v),$$

où $T(v) = \int_G v(g) T(g) d_r g$.

I n d i c a t i o n. L'application cherchée peut être définie par la formule

$$\Phi(\alpha) = \int_G P(\alpha)(\cdot, g)) T(g) d_r g, \tag{14}$$

où $\alpha(\cdot, g)$ désigne l'élément de $C_0(X)$ qui s'obtient de $\alpha \in C_0(X \times G)$ en fixant le deuxième argument.

P r o b l è m e 9. Définir dans $C_0(X \times G)$ une multiplication et une involution de sorte que l'application $\alpha \mapsto \Phi(\alpha)$ soit une $*$-représentation de l'algèbre à involution obtenue.

R é p o n s e: $(\alpha_1 * \alpha_2)(x, g) = \int_G \alpha_1(x, g_1^{-1}) \alpha_2(xg_1^{-1}, g_1 g) d_r g_1$,

$$\alpha^*(x, g) = \alpha\overline{(xg, g^{-1})} \Delta_G(g)^{-1}. \tag{15}$$

Désignons par $\mathfrak{A}$ l'algèbre ainsi obtenue.

Nous dirons que la $*$-représentation Φ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans l'espace *L est accordée* avec la représentation T du groupe G dans le même espace, si nous avons la relation

$$T(g_1) \Phi(f) T(g_2) = \Phi(\tilde{f}), \tag{16}$$

où $\tilde{f}(x, g) = f(xg_1, g_1^{-1} g g_2^{-1}) \Delta_G(g_1)^{-1}$.

Il est clair que si la représentation T est induite dans le sens de Mackey du sous-groupe H, alors la représentation Φ de l'algèbre $\mathfrak{A}$, définie par la formule (14), est accordée avec T.

P r o b l è m e 10. Démontrer que chaque $*$-représentation Φ de l'algèbre $\mathfrak{A}$, accordée avec T, est de la forme (14), où P est une certaine représentation de l'algèbre $C_0(X)$, qui constitue avec T une représentation du G-espace X.

I n d i c a t i o n. Faire appel à la méthode indiquée au **10.2** pour retrouver la représentation du groupe à partir de la représentation de l'algèbre de groupe.

Ainsi, le *critère d'inductibilité de la représentation T du groupe G est l'existence d'une $*$-représentation Φ de l'algèbre $\mathfrak{A}$, accordée avec T.*

Passons à la démonstration du théorème 1.

La condition de nécessité du théorème est tout à fait évidente. En effet, si la représentation $T = \operatorname{Ind} U$ est réalisée sous la forme (7), alors, en faisant correspondre à chaque fonction $f \in C_0(X)$ l'opérateur de multiplication par cette fonction dans l'espace $L^2(X, \nu_s, V)$, nous obtenons la représentation cherchée P de l'algèbre $C_0(X)$.

La démonstration de la suffisance est plus compliquée. Nous indiquerons d'abord une méthode pour retrouver la représentation U

à partir de la représentation induite $T = \text{Ind } U$. Nous verrons ensuite que cette méthode, étant applicable à une représentation quelconque T qui satisfait à la condition du théorème 1, nous donne une certaine représentation U du sous-groupe H. Enfin, nous vérifierons que U est unitaire et T est équivalente à Ind U, ce qui terminera la démonstration.

Ainsi, supposons que T satisfasse à la condition du théorème 1. Construisons, de la manière décrite ci-dessus, la représentation Φ de l'algèbre auxiliaire $\mathfrak{A} \approx C_0(X \times G)$. Cette représentation sera la somme des sous-représentations cycliques. Vu que le foncteur Ind est permutable aux opérations de somme, il suffit de vérifier le théorème pour chaque terme. Supposons donc que Φ soit une représentation cyclique agissant dans l'espace L, et ξ sa source. Supposons que $T = \text{Ind } U$; alors $L = L^2(G, H, U)$ et le vecteur $\xi \in L$ est une fonction vectorielle sur G à valeurs dans l'espace V de la représentation U. Considérons une fonction finie quelconque β sur $G \times G$. L'intégrale $\int\limits_H \beta(hg_1, g_2)\, d_rh$ ne dépend que de g_2 et de la classe d'équivalence Hg_1. Posons

$$\alpha(Hg_1, g_2) = \int\limits_H \beta(hg_1, g_2)\, d_rh.$$

Alors $\alpha \in C_0(X \times G)$. Calculons la valeur de $(\Phi(\alpha)\xi, \xi)$. En se servant des formules (5), (6) et (14), nous obtenons

$$(\Phi(\alpha)\xi, \xi) = \int\limits_G ([\Phi(\alpha)\xi](g_1), \xi(g_1))_V \rho(g_1)\, d_rg_1 =$$

$$= \int\limits_G \int\limits_G \alpha(Hg_1, g_2)(\xi(g_1g_2), \xi(g_1))_V \rho(g_1)\, d_rg_1\, d_rg_2 =$$

$$= \int\limits_H \int\limits_G \int\limits_G \beta(hg_1, g_2)(\xi(g_1g_2), \xi(g_1))_V \rho(g_1)\, d_rh\, d_rg_1\, d_rg_2.$$

En substituant $g_1 \mapsto h^{-1}g_1$ et en se servant des relations (1), (3), (4) et de la formule (4) de **9.1**, on peut écrire l'intégrale obtenue sous la forme

$$\int \int \beta(g_1, g_2)(\xi(g_1g_2), \xi(g_1))_V\, d_rg_1\, d_rg_2.$$

Prenons pour β une fonction de la forme

$$\beta(g_1, g_2) = \theta_1(g_1g_2)\overline{\theta_2(g_1)}\Delta_G(g_1);$$

alors notre intégrale pourra s'écrire $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)_V$, où $\hat{\theta}$ est l'élément de V donné par la formule

$$\hat{\theta} = \int \theta(g)\xi(g)\, d_rg.$$

P r o b l è m e 11. Démontrer que les vecteurs de la forme $\hat{\theta}$, où $\theta = C_0(G)$, sont partout denses dans V.

I n d i c a t i o n. Faire appel au fait que ξ est la source dans L.

P r o b l è m e 12. Démontrer la relation

$$(L(h)\theta)^{\wedge} = [\Delta_H(h)\Delta_G(h)]^{1/2} U(h)\hat{\theta},$$

où $[L(h)\theta](g) = \theta(h^{-1}g)$.

I n d i c a t i o n. Recourir aux formules (1) et (3).

Les résultats des problèmes 11 et 12 permettent de retrouver la représentation U (à équivalence près), d'après la représentation Φ. A savoir, l'espace V est le complété de $C_0(G)$ pour la norme engendrée par le produit scalaire

$$(\theta_1, \theta_2) = (\Phi(\alpha)\xi, \xi), \tag{17}$$

où

$$\alpha(Hg_1, g_2) = \int_H \overline{\theta_2(hg_1)}\,\theta_1(hg_1g_2)\,\Delta_G(hg_1)\,d_rh.$$

La représentation U agit dans cet espace suivant la formule

$$[U(h)\theta](g) = \Delta_H(h)^{-1/2}\Delta_G(h)^{-1/2}\theta(h^{-1}g). \tag{18}$$

Soit maintenant T la représentation du groupe G qui satisfait à la condition du théorème, Φ étant la $*$-représentation correspondante de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans l'espace L. Définissons dans $C_0(G)$ un produit scalaire par la formule (17) et la représentation U du sous-groupe H par la formule (18).

P r o b l è m e 13. Démontrer que le produit scalaire (17) est invariant par rapport aux opérateurs $U(h)$, $h \in H$, donnés par la formule (18).

I n d i c a t i o n. Faire une substitution de variables dans l'intégrale correspondante.

Il est plus difficile de démontrer que le produit scalaire (17) est positif. Pour le faire, montrons que la représentation donnée T est équivalente à la représentation Ind U. (Nous nous permettons ici un certain abus de notation, en désignant par Ind U la représentation obtenue par induction dans le sens de Mackey à partir de la représentation U, sans encore savoir si elle est unitaire ou non.)

L'espace M de la représentation Ind U est composé de fonctions vectorielles F sur le groupe G à valeurs dans $C_0(G)$, c'est-à-dire de fonctions sur $G \times G$. Ces fonctions satisfont à la condition

$$F(hg_1, g_2) = \Delta_G^{-1}(h)\,F(g_1, h^{-1}g_2). \tag{19}$$

Définissons dans M un produit scalaire par l'égalité

$$(F_1, F_2) = \int (F_1(g, \cdot), F_2(g, \cdot))_{C_0(G)}\,\rho(g)\,d_rg. \tag{20}$$

Les formules (19) et (20) sont évidemment des cas particuliers des formules générales (1) et (5) qui définissent l'espace et les opérateurs de la représentation induite.

Soit L_0 un sous-ensemble dense de L composé de vecteurs de la forme $\Phi(\alpha)\xi$, $\alpha \in C_0(X \times G)$. Définissons l'application τ de l'espace L_0 dans M, en posant que τ envoie le vecteur $\Phi(\alpha)\xi$ dans la fonction

$$F(g\ \ g_2) = \alpha(Hg_1, g_1^{-1}g_2)\,\Delta_G(g_1)^{-1}. \tag{21}$$

Problème 14. Démontrer que l'application τ, définie par l'égalité (21), est isométrique et permutable à l'action du groupe G.

Indication. Recourir aux formules (16) et (17).

Problème 15. Démontrer que le produit scalaire (17) est positif.

Indication. Faire appel aux résultats des problèmes 11 et 14.

La démonstration du théorème est terminée.

13.3 Représentation des extensions de groupes. Nous montrerons ici qu'à l'aide du critère d'inductibilité (voir **13.2**), on peut obtenir des renseignements importants sur les représentations irréductibles unitaires des extensions de groupe.

Soit G un groupe localement compact possédant un sous-groupe invariant N.

Le groupe G agit sur N, et, par conséquent, sur l'espace dual $\hat{N}$. Supposerons, pour fixer les idées, que $\hat{N}$ soit un G-espace à droite sur lequel G agit de la manière suivante:

si $n \mapsto U(n)$ est une représentation de la classe $\lambda \in \hat{N}$, alors la représentation de la classe λg est de la forme $n \mapsto U(gng^{-1})$.

Supposons que N soit un groupe apprivoisé. Alors, chaque représentation unitaire T du groupe G se prolonge à une représentation du G-espace $\hat{N}$.

En effet, la restriction de la représentation T à N peut s'écrire sous forme de somme continue:

$$T|_N = \int_{\hat{N}} W_\lambda\, d\mu(\lambda), \tag{1}$$

où W_λ est une représentation primaire de la forme $U_\lambda \otimes S_\lambda$, U_λ appartient à la classe λ et s_λ est une représentation triviale de dimension $n(\lambda)$ (voir théorème 3 de 8.4). Soit

$$L = \int_{\hat{N}} L_\lambda\, d\mu(\lambda) \tag{2}$$

la décomposition correspondante de l'espace L de la représentation T. Nous ferons correspondre à chaque fonction mesurable bornée f sur $\hat{N}$ l'opérateur diagonal correspondant $P(f)$:

$$(P(f)\xi)(\lambda) = f(\lambda)\,\xi(\lambda). \tag{3}$$

Remarquons que cette définition est correcte (c'est-à-dire que l'opérateur $P(f)$ ne dépend pas du choix des décompositions (1) et (2)) comme on le voit du théorème 3, de 8.4.

Problème 1. Démontrer que (T, P) est une représentation du G-espace $\hat{N}$, c'est-à-dire que l'on a la condition (11) de 13.2.
Indication. Démontrer la relation ci-dessus d'abord dans le cas où f est la fonction caractéristique d'un certain sous-ensemble mesurable $S \subset \hat{N}$.
Problème 2. Démontrer que la mesure μ est quasi invariante par rapport à G.
Indication. Faire appel à l'unicité dans le théorème 3 de 8.4, et au fait que les représentations $T|_N$ et $T(g) \, T|_N T(g)^{-1}$ sont unitairement équivalentes.
Problème 3. Démontrer que si la représentation T est irréductible, la mesure μ est alors G-ergodique.
Indication. Si S est un sous-ensemble mesurable G-invariant de N, sa fonction caractéristique χ_S correspond à un opérateur de projection $P(\chi_S)$ permutable à la représentation T. Par conséquent, $P(\chi_S)$ est égal à 0 ou à 1, et donc, $\chi_S = 0$ ou $\chi_S = 1$ presque partout.

Si, en plus, l'action de G sur N satisfait aux conditions du théorème de Glimm de 9.1, la mesure μ est concentrée sur une seule des G-orbites de $\hat{N}$.

Soit X cette orbite.

Les opérateurs $P(f)$ de (3) ne dépendent que de la restriction de f sur X. Nous avons ainsi obtenu une représentation du G-espace homogène X. D'après le critère d'inductibilité de 13.2, la représentation T est induite du sous-groupe H, stabilisateur d'un certain point $x \in X$.

Voyons maintenant ce que l'on peut dire de la représentation U. Elle doit être irréductible, sinon T serait aussi réductible.

D'autre part, le sous-groupe H contient un sous-groupe invariant N: les représentations $n \mapsto U_x(n)$ $n \to U_x(n_1 n n_1^{-1})$ sont évidemment équivalentes si $n_1 \in N$.

Problème 4. Montrer que la restriction de la représentation induite U à N est un multiple de U_x.
Indication. Recourir à la méthode utilisée pour retrouver U à partir de Ind U dans la démonstration du théorème 1 de 13.2 et à la réalisation (1) de la restriction de T à N.

La méthode décrite ici réduit le problème de la classification des représentations unitaires irréductibles du groupe G à la description des représentations irréductibles d'un groupe H plus petit, dont les restrictions à N sont des multiples d'une représentation irréductible donnée de ce sous-groupe invariant. Ce dernier problème, comme nous le verrons plus loin (§ 14), équivaut à classifier les représentations projectives du groupe quotient H/N. Ces considérations prennent une forme particulièrement simple lorsque le sous-groupe

invariant N est commutatif. Dans ce cas, l'espace N est le groupe dual à N par dualité de Pontriaguine.

Nous obtenons ainsi le résultat suivant.

Théorème 1 (G. Mackey). *Si N est un sous-groupe invariant fermé commutatif dans un groupe localement compact G et l'action du groupe G sur $\hat{N}$ satisfait aux conditions du théorème de Glimm de* **9.1**, *alors chaque représentation irréductible T du groupe G est de la forme* Ind (G, H, U), *où H est le groupe stationnaire d'un certain point $\chi \in \hat{N}$, et la restriction de U à N est une représentation scalaire, multiple du caractère χ.*

Pour illustrer l'application du théorème 1 démontrons le fait suivant.

Théorème 2. *Si G est un groupe fini nilpotent ou un groupe de Lie nilpotent connexe, alors chaque représentation unitaire irréductible T du groupe G est monomiale, c'est-à-dire induite par la représentation de dimension 1 d'un certain sous-groupe.*

La démonstration découle du lemme suivant:

Lemme. *Si la représentation T n'est pas de dimension 1, alors elle est induite à partir d'un certain sous-groupe propre du même type.*

L'assertion du théorème découle du lemme, vu que chaque suite strictement décroissante de groupes finis ou de groupes de Lie connexes nilpotents ne contient qu'un nombre fini de termes. (Dans le deuxième cas, ceci découle du fait analogue pour les algèbres de Lie.)

Démontrons le lemme. Notons avant tout que la représentation T peut être supposée exacte, dans le cas d'un groupe fini, et localement exacte (c'est-à-dire à noyau discret), dans le cas d'un groupe de Lie. Dans le cas contraire, la représentation T aurait engendré la représentation du groupe quotient G/N, où N est le noyau de T. Ce groupe quotient est d'ordre plus petit si G est fini, et de dimension plus petite si G est un groupe de Lie. Par conséquent, nous aurions pu faire une récurrence sur l'ordre du groupe ou sur sa dimension. Supposons donc que T soit une représentation exacte (respectivement localement exacte) d'un groupe fini (respectivement d'un groupe de Lie).

Problème 5. Démontrer que le centre Z du groupe G est un groupe cyclique (respectivement un groupe de dimension 1).

Indication. Le centre de G est envoyé par la représentation irréductible T dans le sous-groupe des opérateurs scalaires.

Soit $\tilde{N}$ le centre du groupe quotient G/Z et N l'image réciproque de N par la projection $G \to G/Z$.

Alors N est un sous-groupe invariant commutatif de G.

Problème 6. Démontrer que si G est un groupe connexe linéaire nilpotent qui agit dans l'espace V, alors le sous-groupe stationnaire d'un vecteur quelconque $\xi \in V$ est connexe.

I n d i c a t i o n. Faire appel au fait que le groupe G est exponentiel (voir 6.4). Déduire du théorème d'Engel (voir 6.2) que pour chaque X de l'algèbre de Lie du groupe G l'équation $\exp tX\xi = \xi$ est satisfaite identiquement pour t, ou bien ne possède qu'un nombre fini de racines.

Le fait que l'action de G sur L satisfait aux conditions du théorème de Glimm est trivial dans le cas fini et se vérifie aisément dans le cas d'un groupe de Lie. Nous ne nous attardons pas ici là-dessus, vu que l'action de G sur $\hat{N}$ sera discutée en détail au § 15.

Pour achever la démonstration du lemme, il suffit d'appliquer le théorème 1 au groupe G et au sous-groupe invariant N et de remarquer que la G-orbite correspondante dans N ne peut se réduire à un seul point. En effet, sinon la restriction de T à N serait scalaire, ce qui, vu l'exactitude (respectivement l'exactitude locale) de T impliquerait l'inclusion $N \subset Z$. Le lemme est démontré.

Les groupes dont toutes les représentations irréductibles sont monomiales s'appellent *monomiaux* ou *M-groupes*. Nous avons donc démontré que *tous les groupes finis nilpotents et tous les groupes de Lie nilpotents connexes sont monomiaux*.

P r o b l è m e 7. Tous les M-groupes finis sont résolubles.

I n d i c a t i o n. Soit G un M-groupe non résoluble d'ordre minimal. Démontrer que tous ses groupes quotients sont résolubles. Soit S l'intersection des noyaux de tous les homomorphismes de G dans des groupes résolubles. Démontrer que S est contenu dans tout sous-groupe invariant de G et que $[S, S] = S$. Soit T une représentation unitaire irréductible de G de dimension minimale, non triviale sur S. Supposons que $T = \mathrm{Ind}\,(G, H, \chi)$, où χ est un caractère du sous-groupe H. Soit χ_0 le caractère unité. Démontrer que $T_0 = \mathrm{Ind}\,(G, H, \chi_0)$ est trivial sur S. En déduire que $S \subset H$. Ensuite, de la relation $[S, S] = S$ déduire que $\chi \mid_S \equiv 1$ et donc que T est trivial sur S. La contradiction obtenue démontre qu'il n'existe pas de M-groupes non résolubles.

Un résultat analogue a lieu pour les groupes de Lie : *chaque groupe de Lie monomial connexe est résoluble*.

Pour le lecteur désirant s'exercer à l'application du théorème 1 le problème suivant peut être utile.

P r o b l è m e 8. Décrire toutes les représentations unitaires irréductibles du groupe G des transformations affines de la droite (c'est-à-dire de l'espace vectoriel de dimension 1) sur le corps topologique K, à condition que le groupe additif de ce dernier soit autodual par Pontriaguine.

R é p o n s e. Une série de représentations de dimension 1, correspondant aux caractères du groupe multiplicatif K^* du corps K, et une représentation de dimension infinie qui agit dans l'espace $L^2\,(K^*, d^*x)$ suivant la formule

$$[T\,(a, b)\,f](x) = \chi\,(bx)\,f(ax).$$

Ici d^*x désigne la mesure de Haar sur K^*, a et b sont les paramètres du groupe G qui correspondent à la définition de la transformation affine par la formule $x \mapsto ax + b$, et χ est un caractère additif non trivial du corps K.

13.4. Représentations induites des groupes de Lie et leurs généralisations. Chaque groupe de Lie est localement compact, et, par conséquent, les résultats de **13.2** et de **13.3** sont applicables à ces groupes. D'autre part, la construction d'une représentation induite pour les groupes de Lie admet des généralisations intéressantes et importantes, lors du « passage dans le domaine complexe ».

Avant de passer à ces généralisations, montrons que l'espace de la représentation T du groupe de Lie G induite du sous-groupe fermé H peut être considéré comme espace des sections d'un certain fibré vectoriel sur la variété différentiable $H \setminus G$.

(Une telle liaison entre les représentations induites et les fibrés n'est pas un privilège des groupes de Lie. En généralisant d'une manière appropriée la notion de fibré on peut l'établir pour des groupes quelconques.)

Problème 1. Soient G un groupe de Lie, H son sous-groupe fermé et x un point de l'espace homogène $X = H \setminus G$. Démontrer que dans un certain voisinage W du point x on peut définir une application différentiable $s: W \to G$ qui possède la propriété $xs(y) = y$ pour tous les $y \in W$.

Indication. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G, $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre qui correspond au sous-groupe H, et $\mathfrak{p}$ le sous-espace de G, qui correspond à $\mathfrak{h}$. Démontrer que l'application $\tau: \mathfrak{p} \to X$, définie par la formule

$$\tau(P) = x \cdot \exp P,$$

possède une application dérivée non dégénérée au point $P = 0$. Par conséquent, dans un certain voisinage du point x, il existe une application inverse différentiable τ^{-1} que l'on peut prendre pour l'application s cherchée.

Considérons le recouvrement de la variété X par les voisinages W_i, où il existe des applications $s_i: W_i \to G$ qui satisfont à la condition du problème. Sur l'intersection $W_i \cap W_j$ est définie l'application $y \to s_i(y) s_j(y)^{-1}$ à valeur dans le groupe H. Notons cette application s_{ij}. Si U est une représentation de dimension finie de H dans l'espace V, alors le recouvrement $\{W_j\}$ avec la famille des fonctions $y \to U(s_{ij}(y))$ définit un fibré vectoriel sur X noté E_U.

Problème 2. Démontrer que la classe d'équivalence du fibré E_U ne dépend que de la classe d'équivalence de la représentation U et, en particulier, ne dépend pas du choix initial des applications $s_i: W_i \to G$.

Indication. Utiliser le problème 2 dans 5.4.

Le fibré E_U peut également être obtenu d'une autre manière. A savoir, appliquons la construction du « produit sur un groupe », défini au **2.1**, et posons $E'_U = G \underset{H}{\times} V$. (Le groupe H agit sur G par translations à gauche et sur V conformément à la représentation U.)

Problème 3. Démontrer que E'_U est un fibré vectoriel sur $X = H \setminus G$, équivalent au fibré E_U.

I n d i c a t i o n. Considérer l'application de $W_i \times V$ dans $G \times V$, donnée par la formule $(y, v) \to (s_i(y), v)$, et l'application quotient correspondante de $W_i \times V$ dans $G \underset{H}{\times} V$.

Cette méthode de construction du fibré E_U permet d'y définir l'action du groupe G. En effet, le groupe G est un G-espace à droite, et l'action de G à droite permute à l'action du groupe H à gauche. Par conséquent, l'ensemble $E_U = G \underset{H}{\times} V$ est un G-espace à droite.

P r o b l è m e 4. Démontrer que l'action de G sur E_U est permutable à la projection sur la base et linéaire sur les fibres.

Un fibré avec une telle action du groupe G s'appellera *G-fibration*. Il est clair que dans l'espace $\Gamma(E)$ des sections d'une G-fibration E sur X apparaît une représentation linéaire T du groupe G:

$$[T(g)s](x) = s(xg), \quad x \in X, \quad g \in G, \quad s \in \Gamma(E). \tag{1}$$

P r o b l è m e 5. Démontrer que chaque G-fibration sur une variété homogène $X = H \diagdown G$ est équivalente à un fibré de la forme E_U.

I n d i c a t i o n. Soit x_0 un point de X pour lequel H est le stabilisateur. Pour U on peut prendre la représentation V dans la fibre sur x_0, obtenue à partir de (1).

Soit $C^\infty(G, H, U)$ l'espace de toutes les fonctions différentiables sur G à valeurs dans V, qui satisfont à la condition

$$F(hg) = U(h) F(g), \qquad h \in H, \ g \in G. \tag{2}$$

Il est évident que cet espace est invariant par rapport aux translations à droite par G et, par conséquent, il est muni d'une représentation T du groupe G:

$$(T(g) F)(g_1) = F(g_1 g). \tag{3}$$

P r o b l è m e 6. Démontrer que la représentation (3) dans $C^\infty(G, H, U)$ est équivalente à la représentation (1) dans l'espace $\Gamma(E_U)$ des sections différentiables du fibré E_U.

I n d i c a t i o n. Soit s une section du fibré E_U. Faisons correspondre à cette action une fonction f_s sur G, qui prend au point $g \in G$ une valeur $v \in V$ telle que la classe d'équivalence du couple (g, v) coïncide avec la valeur de la section s au point $Hg \in H \diagdown G$. Démontrer que l'application ainsi construite $s \to f_s$ définit l'isomorphisme cherché de $\Gamma(E_U)$ sur $C^\infty(G, H, U)$.

Ainsi, l'espace de la représentation induite du sous-groupe H est l'espace hilbertien que l'on obtient de l'espace des sections différentiables d'un certain fibré vectoriel sur la variété $X = H / G$, en y introduisant un produit scalaire G-invariant.

P r o b l è m e 7. Si la représentation U est de dimension finie, et X est compact, alors l'espace de Görding de la représentation $T = \mathrm{Ind}(G, H, U)$

coïncide avec l'espace $\Gamma(E_{U_0})$ (voir la définition de U_0 dans **13.2**, formule (3)).

I n d i c a t i o n. Le fait que $\Gamma(E_{U_0})$ est contenu dans l'espace de Görding de la représentation T, se déduit aisément du problème 2 de **10.5**. Pour démontrer l'inclusion inverse, recourir au fait que l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ agit dans l'espace de Görding de la représentation T, et aussi du fait que la fonction généralisée sur la variété X, dont toutes les dérivées appartiennent à l'espace $L^2(X)$, est une fonction infiniment différentiable usuelle. Remarquons que cette partie de l'assertion du problème est vraie sans l'hypothèse de compacité de $H\diagdown G$.

Si le sous-groupe H est connexe, alors l'espace $\Gamma(E_U)$, isomorphe à $C^\infty(G, H, U)$, peut également se définir comme l'espace des solutions d'un certain système d'équations différentielles sur le groupe G.

En effet, soit S une représentation de H dans l'espace $C^\infty(G, V)$, donnée par l'égalité

$$[S(h)f](g) = U(h)f(h^{-1}g). \tag{4}$$

Il est clair que $C^\infty(G, H, U)$ coïncide avec l'ensemble des éléments invariants de la représentation S. Soit S_* la représentation correspondante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ du groupe H.

P r o b l è m e 8. Démontrer que l'espace $C^\infty(G, H, U)$ coïncide avec l'espace des solutions du système d'équations

$$S_*(X)f = 0, \qquad X \in \mathfrak{h} \tag{5}$$

dans $C^\infty(G, V)$.

I n d i c a t i o n. Le groupe connexe H est engendré par un voisinage quelconque de l'unité, y compris par celui qui est recouvert par l'application exponentielle (voir **6.4**).

En se servant de la forme explicite (4) des opérateurs S, on peut écrire les équations (5) comme suit

$$L_Xf + U_*(X)f = 0, \quad X \in \mathfrak{h}, \tag{6}$$

où L_X est l'opérateur de Lie correspondant à l'élément $X \in \mathfrak{g}$ de translations à gauche par le groupe G et U_* est la représentation de l'algèbre $\mathfrak{h}$ dans l'espace V, qui correspond à la représentation U du groupe H.

La condition écrite sous la forme (6) permet d'effectuer « un passage dans le domaine complexe » dans le sens suivant. La représentation $X \mapsto L_X$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sous forme d'opérateurs différentiels sur G, se prolonge par linéarité à la représentation de l'enveloppe complexe $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Soit ρ la représentation de la sous-algèbre complexe $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_c$ dans l'espace V de dimension finie. Alors le système d'équations

$$L_Xf + \rho(X)f = 0, \; X \in \mathfrak{n} \tag{7}$$

définit dans $C^\infty(G, V)$ un certain sous-espace noté $L(G, \mathfrak{n}, \rho)$.

Il est clair que si $\mathfrak{n}$ est l'enveloppe complexe de la sous-algèbre réelle $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, qui correspond au sous-groupe fermé connexe $H \subset G$, et la représentation ρ correspond à la représentation U du sous-groupe H, alors $L(G, \mathfrak{n}, \rho)$ coïncide avec $L(G, H, U)$.

Pour illustrer le cas où $\mathfrak{n} \neq \overline{\mathfrak{n}}$ considérons un exemple très simple. Soient $G = \mathbf{R}^2$, $\mathfrak{g} = \mathbf{R}^2$, $\mathfrak{g}_c = \mathbf{C}^2$ et supposons que pour $\mathfrak{n}$ nous ayons choisi la sous-algèbre complexe de dimension 1 définie par le vecteur $X + iY$, où X et Y sont les vecteurs de base de $\mathfrak{g}$.

Prenons pour ρ la représentation de $\mathfrak{n}$ de dimension 1, qui prend sur le vecteur $X + iY$ la valeur $\lambda \in \mathbf{C}$. Dans ce cas, la condition (7) s'écrira dans des coordonnées appropriées sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda f = 0.$$

En posant $z = x + iy$ et en introduisant les dérivées formelles $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, nous pouvons écrire cette condition sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda}{2} f,$$

d'où l'on a $f = e^{-\lambda \bar{z}/2}\varphi$, où φ est une fonction analytique quelconque de z. (Rappelons que l'équation $\partial\varphi/\partial\bar{z} = 0$ équivaut aux conditions de Cauchy-Riemann pour l'analyticité de la fonction φ.) Par conséquent, l'espace $C^\infty(G, \mathfrak{n}, \rho)$ est dans ce cas isomorphe à l'espace de toutes les fonctions analytiques de z.

Il se trouve que le cas général, avec quelques conditions supplémentaires, est dans un certain sens la superposition des deux cas déjà considérés: l'espace $C^\infty(G, \mathfrak{n}, \rho)$ s'avère isomorphe à l'espace des sections partiellement holomorphes d'une certaine G-vibration sur une variété mixte (voir 5.4 pour la définition de cette notion).

Les conditions supplémentaires sont les suivantes.

L'intersection $\mathfrak{n} \cap \overline{\mathfrak{n}}$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}_c$ qui coïncide, comme on le voit aisément, avec l'enveloppe complexe $\mathfrak{h}_c$ de l'algèbre réelle $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}$.

Supposons que

1) le groupe G contient un sous-groupe fermé H (pas nécessairement connexe), pour lequel $\mathfrak{j}$ est l'algèbre de Lie correspondante;

2) les opérateurs de la représentation adjointe $\mathrm{Ad}\, h$, $h \in H$, prolongés à $\mathfrak{g}_c$ par linéarité, ne modifient pas la sous-algèbre $\mathfrak{n}$;

3) il existe un sous-groupe fermé M dans G, tel que $H \subset M$ et $\mathfrak{n} + \overline{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}_c$ (ici $\mathfrak{m}$ est l'algèbre de Lie du groupe M, et $\mathfrak{m}_c$ l'enveloppe complexe de $\mathfrak{m}$).

Supposons donnée une représentation U du groupe H dans l'espace V de dimension finie. Supposons que la représentation correspondante U_* de l'algèbre $\mathfrak{h}$ se prolonge à une représentation holomorphe ρ de la sous-algèbre $\mathfrak{n}$. Notons $C^\infty(G, \mathfrak{n}, H, \rho, U)$ l'espace des solutions du système (7), qui possèdent les propriétés

$$f(hg) = U(h)f(g), \quad h \in H. \tag{8}$$

Notons que, si le groupe H est connexe, la condition (8) découle de (7).

Théorème 1. *Si les conditions énoncées ci-dessus sont satisfaites, alors l'espace* $X = H \setminus G$ *sera une variété mixte de type* (k, l), $k = \dim G - \dim M$, $l = \frac{1}{2}(\dim M - \dim H)$.

On peut définir une G-fibration partiellement holomorphe $\mathscr{E}_{U,\rho}$ *(équivalente à* $\mathscr{E}_U = G \underset{U}{\times} V$ *dans la catégorie des G-fibrations différentiables), de sorte que la représentation du groupe* G, *qui apparaît alors dans l'espace des sections partiellement holomorphes de* $\mathscr{E}_{U,\rho}$, *soit équivalente à la représentation de ce groupe par translations à droite dans l'espace* $L(G, \mathfrak{n}, H, \rho, U)$.

Démonstration. Introduisons d'abord dans X une structure de variété mixte. Pour cela, posons $Y = M \setminus G$ et notons p la projection naturelle de X sur Y qui fait correspondre à chaque classe $Hg \in X$ la classe $Mg \in Y$ qui la contient. Chaque fibre de la projection p (c'est-à-dire le sous-ensemble $p^{-1}(y)$ dans X) s'identifie à l'espace homogène $Z = H \setminus M$. A savoir, si l'on fixe l'élément g qui transforme le point d'origine x_0 dans le point $x \in p^{-1}(y)$, alors on peut définir l'action du groupe M sur $p^{-1}(y)$, en posant

$$x * m = x_0 mg = xg^{-1}mg.$$

Le sous-groupe stationnaire du point x sera, évidemment, H.

L'identification ainsi obtenue de $p^{-1}(y)$ et de $Z = H \setminus M$ dépend du choix de l'élément $g \in G$. Un autre choix de cet élément équivaut à un automorphisme de l'espace Z à l'aide d'une certaine translation de H.

Introduisons maintenant dans l'espace Z une structure complexe. Pour cela, servons-nous du fait que l'espace Z coïncide localement avec l'espace complexe homogène $N \setminus M_c$, où N et M_c sont des groupes complexes de Lie correspondant aux algèbres de Lie $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{m}_c$. En effet, soient $\widetilde{N}$ et $\widetilde{M}_c$ les groupes de Lie locaux. Alors l'espace quotient $\widetilde{N} \setminus \widetilde{M}_c$ est une variété complexe homogène. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de $\mathfrak{m}_c$ complémentaire à $\mathfrak{n}$, alors chaque élément m de $\widetilde{M}_c$ s'écrira d'une façon unique sous la forme

$$m = n \exp A, \quad n \in \widetilde{N}, \quad A \in \mathfrak{a}. \tag{9}$$

L'application $\widetilde{N}m \to A$ donne, par définition, une carte sur $\widetilde{N} \setminus \widetilde{M}_c$ qui applique $\widetilde{N} \setminus \widetilde{M}_c$ dans le voisinage de zéro de l'espace complexe

vectoriel $\mathfrak{a}$. Remarquons maintenant que l'espace $\mathfrak{m}_c$ est engendré par le sous-espace $\mathfrak{n}$ et le sous-espace réel $\mathfrak{m}$. On en déduit que la $\widetilde{M}$-orbite (où $\widetilde{M}$ est le groupe de Lie local qui correspond à $\mathfrak{m}$) du point d'origine de $\widetilde{N} \setminus \widetilde{M}_c$ est ouverte. D'autre part, l'intersection $\widetilde{M} \cap \widetilde{N}$ est évidemment munie d'une structure de groupe local, qui correspond à l'algèbre $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{h}$. Nous obtenons ainsi une bijection entre les voisinages des points d'origine de $\widetilde{N} \setminus \widetilde{M}_c$ et de $Z = H / M$. Ceci nous permet de définir une carte complexe qui recouvre le point $z_0 \in Z$: l'image du point $z = Hm \in Z$ sera l'élément $A \in \mathfrak{a}$, défini par l'égalité (9).

Problème 9. Démontrer que les cartes obtenues de la carte construite ci-dessus par translations par éléments de M forment un atlas qui définit sur Z une structure de variété complexe, sur laquelle M agit par transformations holomorphes.

Indication. Recourir au fait que l'application holomorphe est exponentielle.

Nous pouvons maintenant construire un atlas sur toute la variété X. Pour cela, fixons un sous-espace $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ complémentaire à $\mathfrak{m}$. Alors, dans un certain voisinage de l'unité chaque élément $g \in G$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$g = m \exp B, \ m \in M, \ B \in \mathfrak{b}. \tag{10}$$

Décomposant ensuite m par la formule (9), nous ferons correspondre à chaque élément g du voisinage de l'unité le couple (A, B), $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$.

Problème 10. Démontrer que les éléments A et B ne dépendent que de la classe $Hg \in X$, que la correspondance $Hg \to (A, B)$ définit une carte qui recouvre le point origine de la variété X, et que les cartes obtenues à partir de cette dernière par translations de G forment un atlas qui définit sur X une structure de variété mixte.

Démontrons les autres assertions du théorème. Soit $\widetilde{\rho}$ une représentation du groupe local $\widetilde{N}$ qui correspond à la représentation ρ de l'algèbre $\mathfrak{n}$. Alors $\mathscr{E}_\rho = \widetilde{M}_c \underset{\widetilde{N}}{\times} V$ sera une $\widetilde{M}_c$-fibration holomorphe sur $\widetilde{N} \setminus \widetilde{M}_c$.

Il est aisé de vérifier que dans la catégorie des fibrés différentiables $\mathscr{E}_\rho$ est équivalent à la restriction du fibré $\mathscr{E}_U = G \underset{M}{\times} V$ sur le voisinage correspondant W du point z_0 dans Z.

Définissons une structure de fibration partiellement holomorphe sur $\mathscr{E}_U$, en identifiant ces restrictions aux sous-ensembles de la forme Wg, avec les fibrations holomorphes qui s'obtiennent de $\mathscr{E}_\rho$ par translations par g. Alors, la dernière assertion du théorème sera corollaire évident de cette définition.

Les représentations du groupe G dans les espaces de sections (partiellement) holomorphes des G-fibrations (partiellement) holomorphes ont reçu le nom de *holomorphiquement induites.*

Il est naturel d'essayer d'introduire dans l'espace de ces représentations un produit scalaire G-invariant et obtenir ainsi une représentation unitaire du groupe G. Parfois ceci est effectivement possible. Par exemple, si la « partie complexe » Z de la base X est compacte ou équivalente à un domaine borné de C^n, alors l'espace hilbertien engendré par $L(G, \mathfrak{n}, H, \rho, U)$ sera un sous-espace fermé de $L^2(G, H, U)$, ce dernier étant l'espace de la représentation induite dans le sens de Mackey.

Une question intéressante et fort peu étudiée qui se pose ici, concerne l'interprétation de l'espace $L(G, \mathfrak{n}, \rho)$ et des représentations que l'on y rencontre dans le cas où les conditions du théorème 1 ne seraient pas satisfaites. (Par exemple, si $\mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}}$ n'est pas une sous-algèbre ou si les groupes M et H ne sont pas fermés.)

Signalons maintenant les généralisations ultérieures de la notion de représentation holomorphiquement induite. Rappelons (voir 5.4) que l'espace des sections partiellement holomorphes des G-fibrations $\mathscr{E}$ sur X peut être considéré comme l'espace des cohomologies de dimension zéro d'un certain faisceau sur X. Ceci suggère de considérer les cohomologies de plus grandes dimensions de ce faisceau et des représentations qui y apparaissent. Ces dernières années de nombreux résultats fondamentaux ont été obtenus dans ce domaine. Un des problèmes importants et pas encore résolu est celui de la démonstration de l'hypothèse de Langlands, à savoir : chaque représentation irréductible d'un groupe de Lie réel semi-simple G, faisant partie du domaine discret de la décomposition d'une représentation régulière, peut être réalisée dans l'espace des L^2-cohomologies d'un faisceau convenablement choisi sur l'espace $X = G/H$, où H est un sous-groupe de Cartan compact du groupe G.

Pour plus de détails dans ce domaine de la théorie des représentations, voir les travaux [67], [121], [107], [112], [125], [128].

13.5. Opérateurs d'entrelacement et dualité. Le problème du calcul du nombre d'entrelacement de deux représentations induites, auquel se réduit le problème de décomposition de la restriction d'une représentation induite à un sous-groupe ou d'un produit tensoriel de représentations induites, joue un rôle fondamental dans la théorie des représentations.

Pour les groupes finis, ce problème se réduit à résoudre les équations fonctionnelles très simples sur les classes d'équivalence bilatères. Soient G un groupe fini, H_1 et H_2 deux sous-groupes, U_1 et U_2 deux représentations de ces sous-groupes dans les espaces V_1 et V_2 respectivement. Supposons que la caractéristique du corps principal ne divise pas l'ordre du groupe G.

Considérons les fonctions opératoires $K(g)$ sur G à valeurs dans $\mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ qui possèdent la propriété

$$K(h_1 g_1 h_2) = U_1(h_1) K(g) U_2(h_2). \tag{1}$$

Faisons correspondre à chaque fonction de ce type un opérateur C_K, qui agit selon la formule

$$[C_K f](g_1) = \sum_{g_2 \in G} K(g_1 g_2^{-1}) f(g_2). \tag{2}$$

Problème 1. Démontrer que si $f \in L(G, H_2, V_2)$, alors $C_K f \in L(G, H_1, V_1)$ et l'application $K \to C_K$ est un isomorphisme entre l'espace de toutes les fonctions opératoires satisfaisant à (1) et l'espace des opérateurs d'entrelacement des représentations $\mathrm{Ind}\, U_2$ et $\mathrm{Ind}\, U_1$.

Indication. Soit P un opérateur dans l'espace V_2^G de toutes les fonctions sur G à valeurs dans V_2, qui agit par la formule

$$[Pf](g) = \sum_{h \in H_2} U_2(h) f(h^{-1}g).$$

Démontrer que P applique V_2^G sur $L(G, H_2, V_2)$ et que chaque opérateur de V_2^G dans V_1^G permutable aux translations à droite par G est de la forme (2).

Il est évident qu'il suffit de vérifier la condition (1) séparément sur chaque classe d'équivalence double $H_1 g H_2$. Cette condition devient particulièrement simple dans le cas où U_1 et U_2 sont des représentations triviales de dimension 1. Dans ce cas, elle donne le résultat suivant.

Le nombre d'entrelacement de deux représentations quasi régulières du groupe G qui correspondent aux sous-groupes H_1 et H_2 est égal au nombre de points dans l'espace $H_1 \setminus G/H_2$. Rappelons (voir **2.1**) que ce dernier nombre coïncide avec le nombre de H_2-orbites dans $X_1 = G/H_1$, de H_1-orbites dans $X_2 = G/H_2$ et de G-orbites dans $X_1 \times X_2$.

Il n'est pas toujours possible de représenter les opérateurs dans les espaces de dimension infinie sous forme d'opérateurs intégraux. Par conséquent, le calcul du nombre d'entrelacement de deux représentations induites de dimension infinie est un problème beaucoup plus difficile. Néanmoins, dans le cas d'un groupe de Lie, on peut proposer une méthode analogue, dans un certain sens, à celle décrite plus haut. A savoir, si les sous-groupes H_1 et H_2 sont tels que $X_1 = G/H_1$ et $X_2 = G/H_2$ sont des variétés compactes et les représentations induites U_1 et U_2 sont de dimension finie, alors les espaces de Görding des représentations $\mathrm{Ind}\, U_1$ et $\mathrm{Ind}\, U_2$ seront nucléaires (voir problème 7 de **13.4**). Pour ces espaces nous avons le théorème du noyau (voir **4.1**).

Par conséquent, chaque opérateur d'entrelacement s'écrit sous la forme

$$C_K f(g_1) = \int_G K(g_1 g_2^{-1}) f(g_2)\, d_r g_2, \tag{2'}$$

où $K(g)$ est une fonction généralisée sur le groupe G, à valeurs dans $\mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ qui satisfait à la condition (1).

Ainsi, la question concernant le nombre d'entrelacement se réduit à trouver les fonctions généralisées sur une variété différentiable X que l'on peut transformer d'une manière donnée par l'action d'un certain groupe de Lie G. Ce problème d'analyse, très intéressant et difficile, n'est pas encore complètement résolu.

Supposons que la variété X soit compacte, que le groupe G ne possède dans X qu'un nombre fini d'orbites $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, telles que la réunion $X_k = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$ est une sous-variété fermée de X pour $k = 1, 2, \ldots, n$. (C'est justement ce cas que l'on rencontre, par exemple, dans le problème de la classification des représentations irréductibles des groupes de Lie semi-simples complexes.)

Alors, on peut introduire dans l'espace $C^\infty(X)$ une filtration décroissante, en posant $C_k^\infty(X) = \{f, \operatorname{supp} f \in X \setminus X_k\}$.

Nous obtiendrons alors dans l'espace des fonctions généralisées une filtration croissante invariante par rapport à l'action du groupe.

En passant à l'espace gradué correspondant, nous réduisons notre problème au problème suivant: décrire les fonctions vectorielles généralisées sur la variété X, qui se transforment d'une manière donnée sous l'action du groupe de Lie G et sont concentrées sur une G-orbite $\Omega \subset X$. On peut proposer la construction suivante de telles fonctions généralisées. Soit H le sous-groupe stationnaire du point $x_0 \in \Omega$. Supposons qu'il existe une fonction vectorielle généralisée F_0 à support au point x_0 telle que

$$F_0(xh) = \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} F_0(x) \text{ pour } h \in H. \tag{3}$$

Alors, pour chaque fonction $\varphi \in C_0^\infty(X)$, la fonction vectorielle Φ sur G, définie par l'égalité

$$\Phi(g) = \langle F_0, T(g)\varphi\rangle,$$

où $[T(g)\varphi](x) = \varphi(xg)$, possède la propriété

$$\Phi(hg) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \Phi(g).$$

Nous pouvons alors définir une fonction généralisée F

$$\langle F, \varphi\rangle = \int_G \rho(g) U(g^{-1}) \Phi(g)\, d_r g, \tag{4}$$

où ρ est une fonction différentiable quelconque sur G qui possède la propriété $\int_{H_1} \rho(hg)\, d_2 h \equiv 1$. De même que dans **13.2** (voir le problème 3 et son corollaire), on peut vérifier que la fonction généra-

lisée F ainsi construite ne dépend pas du choix de la fonction ρ et possède la propriété

$$F(xg) = U(g)^{-1}F(x). \tag{5}$$

P r o b l è m e 2. Démontrer que chaque fonction vectorielle généralisée sur X à support dans Ω et possédant la propriété (5) s'obtient par la construction décrite ci-dessus à partir d'une certaine fonction généralisée F_0 à support au point x_0, qui possède la propriété (3). Si l'on suppose en plus que la fonction F_0 ne dépend que de la valeur de la fonction principale et de ses dérivées dans des directions transversales à $\Omega \subset X$, alors la correspondance entre F_0 et F sera bijective.

I n d i c a t i o n. Recourir au fait que chaque fonction généralisée peut être approximée par une fonction généralisée à support fini.

La solution du problème peut également être obtenue à partir des résultats de F. Bruat [68].

Remarquons que la recherche des fonctions généralisées qui se transforment d'une manière donnée est nécessaire, mais n'est pas en général suffisante pour calculer le nombre d'entrelacement. C'est que les opérateurs qui correspondent aux fonctions trouvées par la formule (2′) agissent d'un espace de Görding d'une représentation dans l'espace conjugué à l'espace de Görding de l'autre représentation. Ils ne peuvent pas être toujours prolongés à un opérateur borné qui agit d'un des espaces hilbertiens dans l'autre. La question de savoir sous quelles conditions un tel prolongement s'avère possible (et quand ce dernier sera un opérateur positif) est assez compliquée et freine la résolution du problème de distinguer les représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie complexes semi-simples dans la classification déjà réalisée de toutes les représentations absolument irréductibles (voir [97]).

Discutons maintenant les généralisations possibles de la dualité de Frobenius. Comme nous l'avons déjà remarqué dans **13.2**, cette dualité n'a plus lieu dans le cas de dimension finie.

Des variantes intéressantes d'analogues de la dualité de Frobenius ont été proposées par G. Mackey [115], C. Moore [118], I. Gelfand et I. Piatetski-Shapiro (voir [20]). Une formulation simple et générale de la dualité généralisée de Frobenius a été récemment trouvée par G. Olchanski [124].

T h é o r è m e 1 (G. O l c h a n s k i). *Soient G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé tel que l'espace quotient $X = H \setminus G$ est compact et possède une mesure G-invariante μ. Soient T une représentation unitaire irréductible du groupe G et U une représentation unitaire de dimension finie du sous-groupe H. Alors*

$$c(T, \operatorname{Ind} U) = c(T^{\infty}|_H, U), \tag{6}$$

où $T^{\infty}|_H$ est la représentation de H dans l'espace de Görding de la représentation T.

Remarquons que dans ce théorème on se sert de la notion d'espace de Görding pour un groupe localement compact quelconque (cf. la remarque à la fin du **12.1**).

Nous donnons ici la démonstration du théorème pour le cas où G est un groupe de Lie. Soit $A \subset \mathscr{C}(T, \text{Ind } U)$; alors, d'après le problème 5 de **10.5**, l'opérateur A envoie l'espace de Görding L^∞ de la représentation T dans l'espace de Görding de la représentation Ind U. Ce dernier coïncide d'après le problème 7 de **13.4** avec $C^\infty(G, H, U)$. Par conséquent, pour chaque vecteur ξ de L^∞ on peut définir un vecteur $A\xi(e)$ dans l'espace de la représentation U. Nous avons

$$AT(h)\,\xi(e) = (\text{Ind } U)(h)\,A\xi(e) = A\xi(h) = U(h)\,A\xi(e)$$

pour $h \in H$. Par conséquent, l'application $\xi \mapsto A\xi(e)$ est un opérateur dans $\mathscr{C}T^\infty|_H, U)$. Il est clair que l'application construite de $\mathscr{C}(T, \text{Ind } U)$ dans $\mathscr{C}(T^\infty|_H, U)$ est linéaire et possède un noyau nul.

Montrons maintenant que chaque opérateur $B \in \mathscr{C}(T^\infty|_H, U)$ s'obtient de cette manière.

Pour cela, posons pour le vecteur $\xi \in L^\infty$

$$\tilde{A}\xi(g) = B(T(g)\,\xi).$$

L'opérateur ainsi défini envoie ξ dans la fonction $\tilde{A}\xi$ sur le groupe G, fonction qui satisfait à la condition

$$\tilde{A}\xi(hg) = U(h)\,\tilde{A}\xi(g).$$

Vu que l'application $g \to T(g)\,\xi$ est différentiable (voir le problème 2 dans **10.5**), la fonction $\tilde{A}\xi$ appartient à $C^\infty(G, H, U)$. D'après la compacité de $X = H \diagdown G$, ce dernier espace est inclus d'une manière continue dans l'espace $L^2(G, H, U)$ de la représentation Ind U.

Nous avons donc construit un opérateur $\tilde{A} \in \mathscr{C}(T^\infty, \text{Ind } U)$. Montrons qu'il se prolonge à un opérateur $A \in \mathscr{C}(T, \text{Ind } U)$.

P r o b l è m e 3. Démontrer que l'opérateur $\tilde{A}$ possède une fermeture.

I n d i c a t i o n. Il faut vérifier que des conditions $\xi_n \to 0$ dans L, $\xi_n \in L^\infty$, $\tilde{A}\xi_i \to f$ dans $L^2(G, H, U)$. il découle que $f = 0$. Faire appel à la méthode de lissage (voir **10.5**) et à la relation

$$\tilde{A}T(\varphi) = (\text{Ind } U)(\varphi)\,\tilde{A} \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

P r o b l è m e 4. Soit $\bar{A}$ la fermeture de $\tilde{A}$. Démontrer que $\bar{A}$ est un opérateur borné.

I n d i c a t i o n. Recourir à la méthode de démonstration du théorème 2 dans **7.3**.

Ainsi, nous avons construit un opérateur $A \in \mathscr{C}(T, \operatorname{Ind} U)$. Il est aisé de voir que l'opérateur qui lui correspond dans $\mathscr{C}(T^{\infty}|_H, U)$ coïncide avec l'opérateur donné B.

Le théorème est démontré.

13.6. Caractères des représentations induites. Le résultat principal de ce paragraphe est la formule (5), qui exprime le caractère généralisé de la représentation induite $T = \operatorname{Ind} U$ en termes du caractère généralisé de la représentation U.

Cette formule est analogue à la formule de Frobenius (voir problème 9 dans **13.1**) et s'identifie à celle-ci lorsque G est un groupe fini.

Rappelons que la formule de Frobenius est de la forme

$$\chi_T(g) = \sum_{x \in H \setminus G} \widetilde{\chi}_U(s(x)\, g s(x)^{-1}),$$

où $\widetilde{\chi}_U$ est une fonction sur G qui coïncide avec χ_U sur H et est égale à 0 en dehors de H.

Supposons maintenant que G soit un groupe localement compact, H son sous-groupe fermé, $X = H \setminus G$ un G-espace homogène à droite. Fixons une application borélienne $s\colon X \to G$ qui possède la propriété $s(x) \in x$ pour tous les $x \in X$. Alors, chaque élément $g \in G$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$g = hs(x), \quad h \in H, \quad x \in X \tag{1}$$

et il existe une mesure borélienne ν_s sur X, telle que

$$d_l g = d_l h\, d\nu_s(x) \tag{2}$$

(voir formules 5′ et 6′ dans **9.1**).

Si χ est une fonction généralisée sur le sous-groupe H, alors nous noterons χ^x la fonction généralisée sur le groupe G, définie par l'égalité

$$\langle \chi^x, \varphi \rangle = \langle \chi, \varphi_x \rangle, \tag{3}$$

où $\varphi_x(h) = \varphi(s(x)^{-1} hs(x))$.

Théorème 1. *Soient U une représentation unitaire du sous-groupe H dans un espace séparable V, et U_0 une représentation liée à U par l'égalité*

$$U_0(h) = \left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right]^{1/2} U(h). \tag{4}$$

Alors:

1) *si le caractère χ_T de la représentation $T = \operatorname{Ind}(G, H, U)$ est défini sur la fonction $\varphi \in C_0(G)$, alors pour presque tous les $x \in X$ les fonctions généralisées $\chi_{U_0}^x$ sont définies sur φ et on a l'égalité*

$$\langle \chi_T, \varphi \rangle = \int_X \langle \chi_{U_0}^x, \varphi \rangle\, d\nu_s(x); \tag{5}$$

2) *si la fonction* $\varphi \in C_0(G)$ *est positivement définie, appartient au domaine de définition des caractères* $\chi_{U_0}^x$ *pour presque tous les* $x \in X$, *et l'intégrale dans le membre droit de l'égalité* (5) *converge, alors* φ *appartient au domaine de définition du caractère* χ_T.

Démonstration. Considérons d'abord comment le choix de l'application s fait varier les grandeurs qui figurent dans la formulation du théorème. Si l'on remplace $s(x)$ par $s'(x) = h(x)\, s(x)$, les fonctions φ_x subissent la transformation engendrée dans $C_0(H)$ par l'automorphisme interne $n \to h(x)^{-1}\, hh(x)$. Cet automorphisme multiplie la mesure $d_l h$ par $\Delta_H(h(x))^{-1}$. Par conséquent, lors du passage de s à s' le caractère $\chi_{U_0}^x$ est multiplié par $\Delta_H(h(x))$. La mesure $\nu_{s'}$, comme on le voit aisément, est liée à la mesure ν_s par l'égalité $d\nu_{s'}(x) = d\nu_s(x)\, \Delta_H(h(x)^{-1})$. Cela veut dire que la grandeur sous l'intégrale dans le membre droit de la formule (5) ne dépend pas du choix de s.

Faisons appel à la formule explicite pour la représentation T donnée dans 13.2:

$$[T(g)\, f](x) = U_0(h)\, f(y), \tag{6}$$

où $h \in H$ et $y \in X$ sont définis par l'égalité

$$s(x)\, g = hs(y). \tag{7}$$

D'où il est aisé d'obtenir l'expression de l'opérateur $T(\varphi) = \int_G T(g)\, \varphi(g)\, d_l g$ comme opérateur intégral dans $L^2(X, V)$ à noyau opératoire.

Problème 1. Démontrer que l'opérateur $T(\varphi)$ est de la forme

$$T(\varphi)\, f(x) = \int_X K_\varphi(x, y)\, f(y)\, d\nu_s(y), \tag{8}$$

où

$$K_\varphi(x, y) = \int_H \varphi(s(x)^{-1} hs(y))\, U_0(h)\, d_l h. \tag{9}$$

Indication. Recourir aux formules (2), (6) et (7).

Nous avons supposé jusqu'ici l'application s uniquement borélienne. Supposons maintenant que sur un certain sous-ensemble ouvert $X_0 \subset X$ de mesure complète, (c'est-à-dire $(X \setminus X_0) = 0$), l'application s soit continue.

La démonstration de la possibilité d'un tel choix étant assez encombrante, nous ne nous arrêterons pas là-dessus tandis que le fait lui-même est assez évident dans tous les exemples ci-dessous.

L'énoncé du théorème 1 découle des égalités (8), (9) et de la propriété des opérateurs intégraux à noyau continu que nous donnerons sous forme d'un théorème à part.

Soient X un espace topologique localement compact à mesure borélienne μ, $K(x, y)$ une fonction opératoire mesurable sur $X \times X$ dont les valeurs sont des opérateurs linéaires dans un espace hilbertien séparable V. Considérons l'opérateur intégral $\mathcal{K}$ dans l'espace $L^2(X, \mu, V)$ des fonctions de carré intégrable sur X à valeurs dans V:

$$[\mathcal{K} f](x) = \int_X K(x, y) f(y)\, d\mu(y). \tag{10}$$

T h é o r è m e 2. *Supposons que la fonction opératoire* $K(x, y)$ *soit continue pour l'ensemble de ses variables dans la topologie opératoire faible. Pour que l'opérateur* $\mathcal{K}$ *donné par la formule* (10) *possède une trace, il faut, et pour les opérateurs positivement définis, il suffit que la trace* $\operatorname{tr} K(x, x)$ *existe pour presque tous les* $x \in X$ *et que l'intégrale*

$$\int_X \operatorname{tr} K(x, x)\, d\mu(x) \tag{11}$$

converge.

Si la trace de $\mathcal{K}$ *existe, elle coïncide alors avec la valeur de l'intégrale* (11).

La démonstration du théorème 2 sera effectuée par étapes. Nous considérerons d'abord le cas $\dim V = 1$, c'est-à-dire que $K(x, y)$ est une fonction numérique continue. Dans ce cas, l'énoncé du théorème prend la forme de la formule bien connue pour la trace d'un opérateur intégral nucléaire à noyau continu. Rappelons le schéma de déduction de cette formule. D'après la définition d'opérateur nucléaire, la fonction $K(x, y)$, comme élément de l'espace $L^2(X \times X)$, est de la forme

$$K(x, y) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\psi_i(y)}, \tag{12}$$

où φ_i et ψ_i sont des fonctions de norme unité dans $L^2(X)$, et $\sum_i |\lambda_i| < \infty$. La trace de l'opérateur $\mathcal{K}$ à noyau $K(x, y)$ est égale, comme on le voit aisément, à l'expression

$$\sum_i \lambda_i (\varphi_i, \psi_i)_{L^2(X)}. \tag{13}$$

Si la somme (12) converge sur la diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ pour la norme de $L^1(\Delta_X, \mu)$, alors l'expression (13) coïncide avec la valeur cherchée (11). Malheureusement, nous savons seulement que la somme (12) converge en moyenne sur $X \times X$. Pour éviter cette difficulté, on emploie généralement la technique de lissage.

A savoir, on construit un filet d'opérateurs S_α, $\alpha \in A$, qui possèdent les propriétés:

1) les normes des opérateurs S_α sont toutes majorées par une même constante;

2) $\lim\limits_{\alpha \in A} S_\alpha = 1$ dans la topologie opératoire forte de l'espace $L^2(X, \mu)$;

3) chaque opérateur S_α applique d'une manière continue $L^2(X, \mu)$ dans $C_0(X)$.

Nous ne donnerons pas ici une construction explicite de cette famille. Remarquons seulement que si X est une variété et la mesure μ dans la carte locale coïncide avec la mesure de Lebesgue usuelle, alors pour S_α on peut prendre l'opérateur qui, dans les limites de la carte donnée, coïncide avec le produit de convolution par une fonction positive continue φ_α convenablement choisie.

Problème 2. Démontrer que si $\mathcal{K}$ est un opérateur nucléaire, alors les opérateurs $\mathcal{K}_\alpha \mathcal{K} = S_\alpha \mathcal{K} S_\alpha^*$ le sont également et $\lim\limits_{\alpha \in A} \operatorname{tr} \mathcal{K}_\alpha = \operatorname{tr} \mathcal{K}$.

Indication. Faire appel à la décomposition (12) de l'opérateur $\mathcal{K}$ dans une somme d'opérateurs de rang un.

Problème 3. Démontrer que l'opérateur $\mathcal{K}_\alpha$ est un opérateur intégral à noyau continu $K_\alpha(x, y)$ et $\operatorname{tr} \mathcal{K}_\alpha = \int\limits_X K_\alpha(x, x)\, d\mu(x)$.

Indication. Recourir à la décomposition (12) et à la propriété 3) des opérateurs S_α.

Problème 4. Démontrer que si $\mathcal{K}$ est un opérateur intégral nucléaire à noyau continu $K(x, y)$ nul en dehors d'un certain compact, alors

$$\operatorname{tr} \mathcal{K} = \int\limits_X K(x, x)\, d\mu(x).$$

Indication. Recourir au problème précédent et au fait que $K_\alpha(x, y)$ converge uniformément vers $K(x, y)$.

Problème 5. Soit $\mathcal{K}$ un opérateur intégral nucléaire à noyau continu $K(x, y)$.

Démontrer que pour chaque fonction $\varphi \in C_0(X)$ nous avons l'inégalité

$$\left| \int\limits_X \varphi(x)\, K(x, x)\, d\mu(x) \right| \leqslant \| \mathcal{K} \|_1 \cdot \| \varphi \|_{C(X)},$$

où $\| \mathcal{K} \|_1$ désigne la norme nucléaire de l'opérateur $\mathcal{K}$.

Indication. Faire appel au résultat du problème 4 et à l'inégalité $\| P_\varphi \mathcal{K} \|_1 \leqslant \| P_\varphi \| \, \| \mathcal{K} \|_1$, où P_φ est l'opérateur de multiplication par φ dans $L^2(X, \mu)$.

La première assertion du théorème dans le cas $\dim V = 1$ découle directement du problème 5. La deuxième se déduit facilement du fait suivant.

P r o b l è m e 6. Si $\mathcal{K}$ est un opérateur positif à noyau continu $K(x, y)$ nul en dehors d'un certain compact, alors $\mathcal{K}$ est un opérateur nucléaire et l'on a

$$\| \mathcal{K} \|_1 = \operatorname{tr} \mathcal{K} = \int_K K(x, x)\, d\mu(x).$$

I n d i c a t i o n. Des conditions du problème il découle que $K(x, x) \geqslant 0$ et $|K(x, y)|^2 \leqslant K(x, x) K(y, y)$. Ensuite, si λ_i sont les valeurs propres de l'opérateur K et φ_i les fonctions propres normées correspondantes, alors pour chaque N, l'opérateur à noyau

$$K(x, y) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \psi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}$$

est positif. En déduire que la somme $\sum \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}$ converge uniformément et que $\sum_i \lambda_i < \infty$.

Passons au cas dim $V > 1$.

Soient $\{e_n\}$ une base orthonormée de l'espace V_n, et P_n l'opérateur de projection sur e_n. Alors, si $\mathcal{K}$ est un opérateur nucléaire, les opérateurs $\mathcal{K}_n = P_n \mathcal{K} P_n$ le seront aussi, et l'on aura $\operatorname{tr} \mathcal{K} = \sum_n \operatorname{tr} \mathcal{K}_n$.

L'opérateur $\mathcal{K}_n$ peut être considéré comme opérateur intégral dans $L^2(X, \mu)$ à noyau

$$K_n(x, y) = (K(x, y) e_n, e_n)_V.$$

D'après la condition du théorème, le noyau est continu. Par conséquent,

$$\operatorname{tr} \mathcal{K}_n = \int_X K_n(x, x)\, d\mu(x)$$

et

$$\operatorname{tr} \mathcal{K} = \sum_n \int_X K_n(x, x)\, d\mu(x).$$

Montrons que dans la dernière expression on peut changer de place les signes de somme et d'intégrale. Pour cela, il suffit de vérifier que la suite $\sum_n K_n(x, x)$ converge absolument dans $L_1(X, \mu)$. Ceci équivaut à son tour à la condition

$$\left| \sum_n \int_X K_n(x, x) \varphi_n(x)\, d\mu(x) \right| < \infty$$

pour une famille quelconque de fonctions $\varphi_n \in L^\infty(X, \mu)$ dont les valeurs absolues sont majorées par une même constante. Mais cette

dernière condition est équivalente à la nucléarité de l'opérateur $\Phi\mathcal{K}$, où Φ est l'opérateur dans $L^2(X, \mu, V)$ donné par la formule

$$\Phi f(x) = \sum_n \varphi_n(x) P_n f(x).$$

Vu que

$$\|\Phi\| = \sup_n \|\varphi_n\|_{L^\infty(X, \mu)} < \infty,$$

l'opérateur $\Phi\mathcal{K}$ est effectivement nucléaire et notre assertion est démontrée. Ainsi, nous avons obtenu l'égalité

$$\operatorname{tr}\mathcal{K} = \int_X \sum_n (K(x, x) e_n, e_n)_V \, d\mu(x.) \tag{14}$$

Montrons maintenant que les opérateurs $K(x, x)$ sont nucléaires pour presque tous les x et, par conséquent, l'égalité (14) se transforme dans l'égalité (5) cherchée. Considérons l'espace

$$L^1(X, \mu, V \hat{\otimes} V')$$

des fonctions opératoires μ-mesurables K sur X à valeurs dans l'espace $V \hat{\otimes} V'$ des opérateurs nucléaires de l'espace V avec la norme

$$\|K\| = \int_X \|K(x)\|_1 \, d\mu(x).$$

L'application bilinéaire de

$$L^2(X, \mu, V) \times L^2(X, \mu, V')$$

dans

$$L^1(X, \mu, V \hat{\otimes} V'),$$

donnée par la formule $(\varphi, \psi) \to \varphi(x) \otimes \psi(x)$ est continue et, par conséquent, se prolonge à une application de l'espace

$$L^2(X, \mu, V) \hat{\otimes} L^2(X, \mu, V').$$

Ce dernier est isomorphe, évidemment, à l'espace des opérateurs nucléaires dans $L^2(X, \mu, V)$. Par conséquent, on peut faire correspondre à chaque opérateur nucléaire $\mathcal{K}$ une fonction

$$K_0(x) \in L^1(X, \mu, V \hat{\otimes} V'),$$

telle que $\operatorname{tr}\mathcal{K} = \int_X \operatorname{tr} K_0(x) \, d\mu(x)$.

Problème 7. Soit $A(x)$ une fonction opératoire sur X, continue et bornée, dont les valeurs sont des opérateurs dans l'espace V. Notons $\mathcal{A}$ l'opérateur dans $L^2(X, \mu, V)$ qui agit suivant la formule

$$(\mathcal{A}f)(x) = A(x) f(x).$$

Démontrer que

$$\operatorname{tr} \mathcal{A}\mathcal{K} = \int_X \operatorname{tr} A(x) K_0(x) \, d\mu(x).$$

Indication. Considérer d'abord le cas où $\mathcal{K}$ est de rang fini.

Problème 8. Démontrer que $K_0(x)$ coïncide avec $K(x, x)$ presque partout.

Indication. Dans le cas contraire, pour certains e_m et e_n et un certain sous-ensemble U de mesure positive dans X on aurait eu l'inégalité

$$(K_0(x) e_n, e_m) \neq (K(x, x) e_n, e_m) \text{ pour } x \in U.$$

Ce qui contredit l'énoncé du problème 8.

Ainsi, la première assertion du théorème est démontrée.

Il reste à démontrer la dernière pour le cas $\dim V > 1$. Elle découle du fait que l'opérateur positif $\mathcal{K}$ possède une trace, si et seulement s'il en est de même pour tous les opérateurs $\mathcal{K}_n = P_n \mathcal{K} P_n$ et $\sum_n \operatorname{tr} \mathcal{K}_n < \infty$.

Corollaire. *Le caractère* χ_T *de la représentation* $T = \operatorname{Ind}(G, H, U)$ *est concentré sur l'adhérence de l'ensemble* $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$. *En particulier, si* H *est un sous-groupe invariant, alors* χ_T *est concentré sur* H.

En effet, le support de la fonction généralisée $\chi_{U_0}^x$ est contenu dans $s(x)^{-1} H s(x)$, tandis que le support χ_T est contenu dans l'adhérence de la réunion des supports $\chi_{U_0}^x$, $x \in X$.

L'ensemble $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$ possède une interprétation géométrique très simple : c'est l'ensemble des éléments $g \in G$ qui possèdent un point immobile dans X.

Ceci suggère que la valeur du caractère χ_T au point g (dans le cas où cette valeur a effectivement un sens, c'est-à-dire quand la fonction généralisée χ_T est une mesure donnée par une densité continue par rapport à la mesure de Haar) est liée à la structure des points immobiles de la transformation g. Mentionnons ici un des résultats semblables.

Problème 9. Soient G un groupe de Lie, H son sous-groupe fermé et U une représentation unitaire de dimension finie du groupe H. Supposons que le groupe G possède un sous-ensemble ouvert G_0 tel que tous les éléments $g \in G_0$ n'ont qu'un nombre fini de points fixes non dégénérés dans X. (Non dégénéré veut dire que pour l'application dérivée g_* de l'espace tangent à un point fixe, l'unité n'est pas un nombre propre.) Démontrer que dans ce cas la restriction du caractère χ_T de la représentation $T = \operatorname{Ind}(G, H, U)$ à G_0 sera une mesure dont la densité par rapport à $d_l g$ est donnée par la formule

$$\rho_T(g) = \sum \frac{\chi_U(s(x_i) g s(x_i)^{-1})}{|\det(g_* x_i)^{1/2} - g_*(x_i)^{-1/2})|}, \tag{15}$$

où la somme est calculée sur tous les points fixes x_i de la transformation g.

I n d i c a t i o n. Soient $g_0 \in G_0$ et x_0 un point fixe de la transformation g_0. Démontrer que l'application de $X \times H$ dans G par la formule $(x, h) \mapsto s(x)^{-1} hs(x)$ est un difféomorphisme dans le voisinage du point (x_0, h_0) et que la mesure $dv_s(x)\, d_l h$ est envoyée par ce difféomorphisme dans une mesure $d\lambda(g)$ telle que sa dérivée par la mesure $d_l g$ est égale, au point g_0, à $|\det(1 - (g_0)_*)|$. Faire également appel aux formules (4), (5) et à la relation $\frac{\Delta_G(h_0)}{\Delta_K(h_0)} = |\det(g_0)_*|$.

Il est à signaler ici que la formule (15) est liée à l'expression proposée par M. Atiah et P. Bott dans [59] pour les traces des opérateurs dans les espaces des sections des fibrés différentiables. Dans le travail de Atiah et Bott on considère les opérateurs $T = D \cdot S$, où S est un opérateur de translation dans le fibré différentiable et D un opérateur pseudodifférentiel. Dans le cas où la translation ne possède qu'un nombre fini de points fixes non dégénérés sur la base, on montre que la forme linéaire $f(D) = \operatorname{tr}(DS)$ se prolonge d'une façon unique (par continuité dans une topologie convenable) du sous-espace des opérateurs intégraux nucléaires à noyau différentiable à l'espace de tous les opérateurs pseudodifférentiels. Pour le cas où D est un opérateur différentiel (en particulier, l'opérateur de multiplication par une fonction), les auteurs signalent une formule explicite qui exprime la trace de l'opérateur T en fonction des coefficients de l'opérateur D dans les points fixes de S. On peut vérifier que la formule d'Atiah-Bott, de même que la formule (15), coïncide avec l'expression que l'on obtient en mettant l'opérateur T sous forme d'opérateur intégral à noyau généralisé et en calculant ensuite tout à fait formellement la trace par la formule (11).

§ 14. REPRÉSENTATIONS PROJECTIVES

14.1. Groupes projectifs et représentations projectives. Considérons un espace vectoriel V de dimension n sur le corps K. Le groupe de toutes ces transformations linéaires inversibles est isomorphe au groupe $GL(n, K)$ des matrices non dégénérées d'ordre n, à éléments dans K.

Soit $P(V)$ l'espace projectif correspondant, c'est-à-dire la famille de tous les sous-espaces de dimension 1 de V. L'action du groupe $GL(n, K)$ dans $P(V)$ n'est pas effective [1]: les matrices scalaires (et elles seules) donnent la transformation identique de $P(V)$.

Par conséquent, le groupe de toutes les transformations projectives (c'est-à-dire des automorphismes de $P(V)$) est isomorphe au groupe $PGL(n, K) = GL(n, K)/C$, où C est l'ensemble des matrices scalaires.

Le groupe $PGL(n, K)$ possède également une autre réalisation importante.

P r o b l è m e 1. Soit $\mathrm{Mat}_n(K)$ l'algèbre matricielle complète d'ordre n sur le corps K. Démontrer que chaque automorphisme de $\mathrm{Mat}_n(K)$ est de la forme

$$X \mapsto AXA^{-1}. \qquad (1)$$

[1] L'action du groupe G sur l'ensemble X s'appelle *effective*, si à chaque élément $g \neq e$ correspond une transformation non identique de X.

I n d i c a t i o n. Soient P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ des matrices diagonales dont le i-ème élément est égal à 1 et les autres sont nuls.

Utiliser les relations

$$P_iP_j = \begin{cases} 0 \text{ pour } & i \neq j, \\ P_i \text{ pour } & i = j, \end{cases}$$

et démontrer que les images de P_i par un automorphisme quelconque sont des opérateurs de projection sur des sous-espaces de dimension 1.

C o r o l l a i r e. *Le groupe des automorphismes de l'algèbre* $\mathrm{Mat}_n(K)$ *est isomorphe à* $PGL(n, K)$.

En effet, la transformation (1) est identique si et seulement si A est une matrice scalaire.

Considérons maintenant un espace hilbertien complexe H et l'espace projectif correspondant $P(H)$ (l'ensemble de tous les sous-espaces de dimension 1 de H).

On peut introduire dans $P(H)$ une distance:

$$\rho(h_1, h_2) = \| P_1 - P_2 \|, \tag{2}$$

où P_i est l'opérateur de projection orthogonale sur les sous-espaces de dimension 1 h_i, $i = 1, 2$.

P r o b l è m e 2. Soit ξ_i un vecteur unité dans le sous-espace h_i, $i = 1, 2$. Démontrer que

$$\rho(h_1, h_2)^2 = 1 - |(\xi_1, \xi_2)|^2.$$

C o r o l l a i r e. *La condition* $\rho(h_1, h_2) = 1$ *équivaut à l'orthogonalité de* h_1 *et* h_2.

P r o b l è m e 3. Démontrer que chaque transformation isométrique de $P(H)$ est de la forme

$$h \mapsto Uh, \tag{3}$$

où $h \in P(H)$ et U est un opérateur unitaire ou antiunitaire dans H.

I n d i c a t i o n. Soient $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une base orthonormée de H et h_α le sous-espace de dimension 1 engendré par le vecteur ξ_α. Pour chaque transformation isométrique S de l'espace $P(H)$, il existe une transformation S_0 de la forme (3), telle que SS_0^{-1} laisse sur place tous les points h_α, $\alpha \in A$. En déduire, en utilisant le problème 2, que pour chaque sous-ensemble $A_0 \subset A$ la transformation SS_0^{-1} envoie en elle-même la famille $P_{A_0}(H)$ des sous-espaces $h \in P(A)$ engendrés par les vecteurs de la forme $\xi = \sum_{\alpha \in A_0} c_\alpha \xi_\alpha$. Montrer que la transformation SS_0^{-1} s'écrit sous la forme (3), où U est un opérateur unitaire diagonal dans la base $\{\xi_\alpha\}$, ou bien cet opérateur est le produit d'une telle transformation et de la conjugaison complexe (dans la même base).

Ainsi, le groupe $P\tilde{U}(H)$ de toutes les transformations isométriques de $P(H)$ est isomorphe au groupe quotient $\tilde{U}(H)/C$, où

$\tilde{U}(H)$ est le groupe de tous les opérateurs unitaires et antiunitaires dans H, et C son centre, formé des opérateurs unitaires scalaires.

Le groupe $\tilde{U}(H)$ est un groupe topologique par rapport à la topologie opératoire forte (qui coïncide sur $\tilde{U}(H)$ avec la topologie opératoire faible). Il est évident que C est un sous-groupe fermé dans $\tilde{U}(H)$. Par conséquent, le groupe quotient $P\tilde{U}(\tilde{H}) = \tilde{U}(H)/C$, muni de la topologie quotient, sera un groupe topologique séparé.

Problème 4. Démontrer que la composante connexe de l'unité dans $P\tilde{U}(H)$ sera le groupe $PU(H) = U(H)/C$, où $U(H)$ est le groupe des opérateurs unitaires dans H.

Indication. Utiliser le fait bien facile à déduire du théorème spectral pour les opérateurs unitaires que le groupe $U(H)$ est connexe dans la topologie forte.

De même que pour le cas de dimension finie, on peut indiquer une réalisation de $P\tilde{U}(H)$ comme groupe des automorphismes de l'algèbre opératoire.

Problème 5. Notons $\mathfrak{B}(H)$ la C^*-algèbre de tous les opérateurs bornés dans H. Montrer que chaque automorphisme de $\mathfrak{B}(H)$ est de la forme

$$X \mapsto UXU^{-1}, \tag{4}$$

où $U \in \tilde{U}(H)$.

Indication. Utiliser la méthode employée pour résoudre le problème 1 en tenant compte du fait que les opérateurs P_i et leurs images par les automorphismes sont hermitiens.

Corollaire. *Le groupe de tous les automorphismes de* $\mathfrak{B}(H)$ *est isomorphe à* $P\tilde{U}(H)$.

Comme nous l'avons déjà dit dans **7.1**, on appelle représentation projective du groupe G tout homomorphisme de G dans le groupe $PGL(n, K)$. En choisissant pour chaque élément de $PGL(n, K)$ un élément de $GL(n, K)$ qui s'y projette, nous voyons que chaque représentation projective peut être définie comme l'application $T: G \to GL(n, K)$ qui possède la propriété

$$T(g_1)\,T(g_2) = c(g_1, g_2)\,T(g_1g_2), \tag{5}$$

où $c(g_1, g_2)$ est une fonction sur $G \otimes G$ à valeurs dans $K^* = K \setminus \{0\}$.

Un changement du choix des représentants de $T(g)$ entraîne la multiplication de la fonction $c(g_1, g_2)$ par une fonction quelconque de la forme

$$c_0(g_1, g_2) = \frac{b(g_1)\,b(g_2)}{b(g_1g_2)}. \tag{6}$$

D'autre part, la fonction $c(g_1, g_2)$ n'est pas arbitraire. Elle doit satisfaire à l'identité

$$c(g_1, g_2)\,c(g_1g_2, g_3) = c(g_1, g_2g_3)\,c(g_2, g_3), \tag{7}$$

qui découle de la comparaison des opérateurs $T(g_1g_2)\,T(g_3)$ et $T(g_1)\,T(g_2g_3)$.

Si l'on se rappelle les définitions de **2.5**, on voit que la représentation projective T définit d'une façon unique un certain élément h_T du groupe $H^2(G, K^*)$ des cohomologies de G de dimension deux à valeurs dans K^*.

Chaque cocycle $c(y_1, g_2)$ appartenant à la classe h_T s'appelle *multiplicateur* de la représentation projective T. Les multiplicateurs qui appartiennent à la classe nulle, c'est-à-dire ayant la forme (6), s'appellent triviaux. Il est clair qu'une représentation projective à multiplicateur trivial est équivalente à une représentation linéaire (c'est-à-dire à une représentation à multiplicateur identiquement égal à 1).

On appelle *représentation unitaire projective* du groupe G tout homomorphisme de ce groupe dans le groupe $P\tilde{U}(H)$.

Si G est un groupe topologique, cet homomorphisme est supposé continu.

Du résultat du problème 4 il s'ensuit que pour les groupes G connexes les représentations projectives unitaires sont des homomorphismes de G dans $PU(H)$.

Les propriétés des groupes projectifs décrites dans les problèmes 1 et 5 font apparaître les représentations projectives et projectives unitaires du groupe G dans de nombreux problèmes liés à ce groupe. Expliquons ici en détail comment l'étude des représentations linéaires (respectivement unitaires) des extensions des groupes amène aux représentations projectives (respectivement aux représentations projectives unitaires). D'autres problèmes où les représentations projectives font également leur apparition seront étudiés dans les numéros **17.2** et **18.2**.

Rappelons que dans le numéro **13.3** nous avons réduit la classification des représentations de l'extension d'un groupe au problème suivant. Supposons donnés le groupe H, son sous-groupe invariant N et la représentation U du sous-groupe N qui possède la propriété: pour chaque $h \in H$ les représentations $U(n)$ et $U_h(n) = U(hnh^{-1})$ sont équivalentes. Il faut décrire toutes les représentations irréductibles T du groupe H dont la restriction à N est un multiple de U. Nous montrerons maintenant que ce dernier problème équivaut à la classification des représentations projectives du groupe quotient $K = H/N$.

Pour chaque classe $k \in K$, choisissons un représentant $\sigma(k) \in H$. Alors, chaque élément $h \in H$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$h = \sigma(k)\cdot n, \quad k \in K, \quad n \in N. \tag{7}$$

Il sera utile de mettre l'espace V où agit la représentation cherchée T sous forme de produit hilbertien $V_1 \otimes V_2$ de sorte que les

opérateurs $T(n)$, $n \in N$ prennent la forme

$$T(n) = 1_{V_1} \otimes U(n). \tag{8}$$

Notons que la possibilité d'écrire les opérateurs $T(n)$, $n \in N$ sous la forme (8) est équivalente au fait que $T|_N$ est un multiple de U.

Par ailleurs, vu que pour chaque $k \in K$ les représentations

$$U(n) \text{ et } U_k(n) = U(\sigma(k) n \sigma(k)^{-1})$$

sont équivalentes, il existe dans l'espace V_2 les opérateurs $W(k)$ tels que

$$U(\sigma(k) n \sigma(k)^{-1}) = W(k) U(n) W(k)^{-1}. \tag{9}$$

Comparons les opérateurs $T(\sigma(k))$ et $1_{V_1} \otimes W(k)$ d'après leur action sur les opérateurs $T(n)$, $n \in N$. Des relations (8) et (9), il est aisé de déduire que l'opérateur $T(\sigma(k)) (1_{V_1} \otimes W(k)^{-1})$ permute à tous les opérateurs $T(n)$, $n \in N$. Vu que U est irréductible, on peut donc en déduire que cet opérateur est de la forme $S(k) \otimes 1_{V_2}$ (voir problème 1 de 4.5 pour le cas unitaire et théorème 2 de 8.2 pour le cas d'une représentation linéaire de dimension finie). Ainsi, la représentation cherchée T doit être de la forme

$$T(h) = S(k) \otimes W(k) U(n), \tag{10}$$

où $k \in K$ et $n \in N$ se définissent par l'égalité (7).

Que peut-on dire maintenant sur les opérateurs $S(k)$ et $W(k)$. La condition (9) définit l'opérateur $W(k)$ à un multiple scalaire près. Par conséquent, les opérateurs $S(k)$ ne sont également définis qu'à un multiple scalaire près. Nous obtenons ainsi une application de K dans le groupe des transformations projectives. Montrons que cette application sera un homomorphisme. Ceci découle du fait très simple suivant.

P r o b l è m e 6. L'égalité $A \otimes B = A_1 \otimes B_1$ n'est possible que si $A = \lambda A_1$, $B = \lambda^{-1} B_1$ pour un certain scalaire λ.

I n d i c a t i o n. Comparer les éléments matriciaux des deux opérateurs.

En effet, du fait que $\sigma(k_1) \sigma(k_2)$ est égal à $\sigma(k_1 k_2)$ modulo N, on déduit que l'opérateur $T(\sigma(k_1) \sigma(k_2))$ est de la forme

$$S(k_1 k_2) \otimes W(k_1 k_2) U(n)$$

pour un certain $n \in N$. D'autre part, cet opérateur est égal au produit de $T(\sigma(k_1))$ et de $T(\sigma(k_2))$, c'est-à-dire

$$S(k_1) S(k_2) \otimes W(k_1) W(k_2).$$

Par conséquent, d'après le problème 6

$$S(k_1) S(k_2) = \lambda(k_1, k_2) S(k_1, k_2). \tag{11}$$

Donc S est une représentation projective à multiplicateur $\lambda(k_1, k_2)$ défini par la relation

$$W(k_1)\,W(k_2) = \lambda(k_1, k_2)^{-1} W(k_1k_2)\,U(n), \qquad (12)$$

où $n \in N$ est donné par l'égalité

$$\sigma(k_1)\,\sigma(k_2) = \sigma(k_1k_2)\,n. \qquad (13)$$

Le résultat de tous les raisonnements ci-dessus sera le

Théorème 1. *La formule* (10) *établit une bijection entre les représentations T du groupe H, dont les restrictions sur N sont des multiples de la représentation irréductible U, et les représentations projectives S du groupe $K = H/N$ à multiplicateur* (12). *La représentation T est irréductible si et seulement si la représentation projective correspondante S l'est aussi.*

14.2. Théorie de Shur. On peut construire une représentation projective du groupe G de la manière suivante. Soit

$$1 \to G_0 \to \widetilde{G} \to G \to 1$$

une extension centrale du groupe G à l'aide d'un sous-groupe commutatif G_0. Considérons la représentation linéaire $\widetilde{T}$ du groupe $\widetilde{G}$ sur le corps K et supposons que tous les opérateurs $\widetilde{T}(g_0)$, $g_0 \in G_0$ soient scalaires.

Pour chaque $g \in G$ choisissons une image réciproque quelconque $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Il est clair qu'en faisant correspondre à l'élément $g \in G$ l'opérateur $\widetilde{T}(\widetilde{g})$ nous obtiendrons une représentation projective du groupe G.

Nous dirons que la représentation projective $\widetilde{T}$, obtenue par la construction décrite ci-dessus, *est linéarisée par le groupe* $\widetilde{G}$ ou *s'obtient de la représentation linéaire* $\widetilde{G}$.

Problème 1. Démontrer que chaque représentation projective T du groupe G est linéarisée par un certain groupe $\widetilde{G}$.

Indication. Prendre pour $\widetilde{G}$ l'extension centrale de G à l'aide de K^* correspondant à la classe h_T (voir 2.5).

Il se trouve que pour un groupe fini G, il existe une extension centrale *universelle* $\widetilde{G}$ qui linéarise toutes les représentations projectives du groupe G. On a, en effet, le

Théorème 1 (I. Shur). *Soient G un groupe fini, K un corps algébriquement fermé de caractéristique quelconque. Il existe alors une extension centrale $\widetilde{G}$ du groupe G, à l'aide d'un groupe abélien fini G_0, tel que chaque représentation projective du groupe G sur le corps K s'obtient de la représentation linéaire du groupe $\widetilde{G}$, scalaire sur G_0.*

D é m o n s t r a t i o n. Si l'on admet que le groupe G_0 ne soit pas fini, le théorème se démontre aisément sans aucune restriction au groupe G et au corps K par le procédé suivant fort simple. Considérons le groupe $Z^2(G, K^*)$ de tous les cocycles de dimension deux sur G à valeurs dans K^*. A chaque couple d'éléments g_1 et g_2 de G, il correspond un homomorphisme

$$\alpha_{(g_1, g_2)}: Z^2(G, K^*) \to K^*,$$

qui envoie le cocycle c dans le nombre $c(g_1, g_2)$.

P r o b l è m e 2. Démontrer que l'application $(g_1, g_2) \to \alpha_{(g_1, g_2)}$ est un cocycle de dimension deux sur G à valeurs dans le groupe M de tous les homomorphismes de $Z^2(G, K^*)$ dans K^*.

Construisons maintenant l'extension G_1 du groupe G, à l'aide du sous-groupe M, correspondant au cocycle α du problème 2. Rappelons que cette extension est formée des couples (g, m), $g \in G$, $m \in M$, dont la multiplication s'effectue d'après la règle

$$(g_1, m_1)(g_2, m_2) = (g_1g_2, m_1m_2\alpha(g_1, g_2)). \tag{2}$$

Si T_1 est une représentation linéaire du groupe G_1 dont la restriction au sous-groupe M est scalaire et de la forme

$$T_1(1, m) = m(c), \quad c \in Z^2(G, K^*), \tag{3}$$

les opérateurs $T(g) = T_1(g, 1)$ satisfont à la condition (5) de **14.1.** La réciproque est également vraie: si les opérateurs $T(g)$ satisfont à la condition (1), la formule

$$T_1(g, m) = T(g) \cdot m(c) \tag{4}$$

définit une représentation linéaire du groupe G_1.

Ainsi, toutes les représentations projectives du groupe G s'obtiennent à partir des représentations linéaires du groupe G_1.

Le groupe M faisant partie de cette construction est trop large. En particulier, il peut être infini même si G est fini. Or, on peut remplacer M, sans perdre les propriétés nécessaires de ce groupe, par un groupe plus restreint. En effet, soit $Z_1^2(G, K^*)$ un sous-groupe de $Z^2(G, K^*)$ possédant une intersection non vide avec chaque classe de cocycles cohomologiques. Autrement dit, la projection naturelle de $Z_1^2(G, K^*)$ sur $H^2(G, K^*)$ est un épimorphisme. Pour obtenir toutes les représentations projectives du groupe G, il suffit de considérer seulement les cocycles de $Z_1^2(G, K^*)$.

Soit M_1 le sous-groupe de M annulant $Z_1^2(G, K)$. Si la représentation projective T correspond au cocycle $c \in Z_1^2(G, K^*)$, la représentation linéaire T_1 définie par la formule (4) est triviale sur le sous-groupe $M_1 \subset G_1$. Par conséquent, elle engendre une représentation du groupe $\widetilde{G} = G_1/M_1$.

D'après l'hypothèse ci-dessus, chaque représentation projective du groupe G est équivalente à une représentation à multiplicateur dans $Z_1^2(G, K^*)$. Par conséquent, chaque représentation projective de G s'obtient d'une représentation linéaire du groupe $\widetilde{G}$. Ce dernier est évidemment l'extension centrale de G à l'aide du groupe $G_0 = M/M_1$.

Il est donc naturel de rechercher le plus petit sous-groupe de $Z_1^2(G, K)$ possédant la propriété nécessaire. Ce groupe ne peut être trop petit, car $H^2(G, K^*)$ est son groupe quotient.

Il se trouve que dans les conditions du théorème (c'est-à-dire pour un groupe fini G) on peut bien atteindre cette limite naturelle. A savoir, il existe un tel sous-groupe $Z_1^2(G, K^*)$ dans $Z^2(G, K^*)$ que l'on peut projeter isomorphiquement sur $H^2(G, K^*)$.

Cette assertion se déduit aisément (voir, par exemple, [13], § 53) de la théorie des extensions, décrite dans **2.4**, et du fait suivant.

Problème 3. Soit G un groupe fini. Démontrer que $H^2(G, K^*)$ est un groupe fini, dont l'ordre ne divise pas la caractéristique du corps K, mais divise l'ordre de G.

Indication. Supposons que l'ordre de G soit égal à n et que $c \in Z^2(G, K^*)$. Démontrer que $c(g_1, g_2)^n = \dfrac{b(g_1)b(g_2)}{b(g_1g_2)}$, où $b(g) = \prod\limits_{g_1 \in G} c(g, g_1)$. Vérifier ensuite que si l'élément $h \in H^2(G, K^*)$ est d'ordre k, le cocycle lui correspondant peut être choisi de manière à avoir $c(g_1, g_2)^k \equiv 1$. Enfin, si p est la caractéristique du corps K, alors dans K^* on peut trouver les racines uniques de degré p. Par conséquent, le groupe $H^2(G, K^*)$ possède aussi la même propriété.

La liaison décrite ici entre les représentations projectives du groupe G sur le corps K et le groupe $H^2(G, K^*)$ peut s'avérer utile pour le calcul de ce dernier groupe.

Problème 4. Démontrer que $H^2(G, K^*) = 0$ si G est un groupe libre.

Indication. Chaque représentation projective d'un groupe libre est équivalente à une représentation linéaire.

Problème 5. Démontrer que si le groupe $H^2(G, K^*)$ est trivial, alors le groupe $H^2(G \times G, K^*)$ est isomorphe au groupe de toutes les applications $c: G \times G \to K^*$, multiplicatives par rapport à chaque argument et possédant la propriété

$$c(g_2, g_1) = c(g_1, g_2)^{-1}.$$

Indication. Soit T la représentation projective de $G \times G$ sur K: poser

$$c_T(g_1, g_2) = T(g_1, 1)\,T(1, g_2)\,T(g_1, 1)^{-1}T(1, g_2)^{-1}.$$

Utiliser le fait que les restrictions de T aux sous-groupes $G \times 1$ et $1 \times G$ sont équivalentes à une représentation linéaire.

14.3. Représentations projectives des groupes de Lie. La théorie de Shur des représentations projectives des groupes finis peut être

appliquée aux groupes topologiques. Pour la notion de cohomologies continues ou boréliennes des groupes topologiques voir le travail récemment publié de C. Moore [119].

Considérons ici le cas le plus simple (mais en même temps le plus important pour les applications), où le groupe considéré G est un groupe de Lie connexe.

Soit T une représentation complexe projective de G. Considérons le groupe G_1, dont les éléments sont les couples de la forme (g, A), où $g \in G$ et A est l'un des opérateurs linéaires qui engendrent la représentation projective $T(g)$. La multiplication dans G_1 s'effectue par composantes:

$$(g_1, A_1)(g_2, A_2) = (g_1 g_2, A_1 A_2).$$

L'application $(g, A) \to g$ est évidemment un épimorphisme de G_1 sur G, dont le noyau est l'ensemble des couples de la forme $(e, \lambda \cdot 1)$, où $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Nous obtenons ainsi l'extension

$$1 \to \mathbf{C}^* \to G_1 \to G \to 1. \tag{1}$$

La représentation T s'obtient de la représentation linéaire $\widetilde{G}$, qui fait correspondre au couple (g, A) l'opérateur A.

La représentation unitaire projective T (c'est-à-dire l'homomorphisme dans le groupe $PU(H)$) admet une construction analogue.

Dans ce cas, le rôle de G_1 revient à l'ensemble des couples (g, U), où U est un opérateur unitaire qui donne la transformation $T(g)$ de l'espace projectif $P(H)$. Nous obtenons ainsi l'extension

$$1 \to \mathbf{T} \to G_1 \to G \to 1. \tag{2}$$

La représentation T s'obtient de la représentation linéaire unitaire G_1 qui envoie (g, U) dans U.

Montrons maintenant que le groupe obtenu G_1 se munit d'une structure de groupe de Lie, telle que (1) et (2) s'avèrent des suites exactes dans la catégorie des groupes de Lie. Pour fixer les idées considérons le cas d'une représentation unitaire. Soit $(g, U) \in G_1$. Choisissons les vecteurs unité ξ et η dans l'espace de la représentation unitaire pour lesquels $(U\xi, \eta) \neq 0$.

Problème 1. Démontrer qu'il existe un voisinage W du point g tel que $(V\xi, \eta) \neq 0$ pour tous les opérateurs unitaires V qui définissent la transformation projective $T(g)$, $g \in W$.

Indication. Utiliser la continuité de l'application

$$T\colon G \to PU(H).$$

Si h_1 et h_2 sont les sous-espaces de H engendrés par η et ξ, alors on peut prendre pour W l'ensemble de tous les $g \in G$ pour lesquels

$$\rho(T(g)h_1, h_2) < 1$$

(voir problème 2 de **14.1**).

Soit W_1 l'image réciproque du voisinage W dans G_1 par la projection naturelle de G_1 dans G.

L'application $(g, U) \to \left(g, \frac{(U\xi, \eta)}{|(U\xi, \eta)|}\right)$ envoie bijectivement W_1 sur $W \times \mathbf{T}$. Munissons W_1 de la structure de variété que possède $W \times \mathbf{T}$.

Problème 2. Démontrer que l'atlas ainsi obtenu sur G_1 se compose de cartes liées continûment et définit sur G_1 une structure de groupe de Lie.

Indication. Utiliser la continuité de la fonction

$$g \to |(U(g)\xi, \eta)| = \rho(T(g)h_1, h_2)$$

et le théorème de Gleason-Montgomery-Zippin de **6.1**.

Ainsi, le groupe G_1 est un groupe de Lie qui est l'extension du groupe G à l'aide de $\mathbf{T}$.

Soit $\widetilde{G}$ le revêtement universel du groupe G et $\widetilde{G}_1$ le revêtement universel du groupe G_1.

Nous avons alors un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \leftarrow & \widetilde{G} & \leftarrow & \widetilde{G}_1 & \leftarrow & \mathbf{R} & \leftarrow & 1 \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 1 & \leftarrow & G & \leftarrow & G_1 & \leftarrow & \mathbf{T} & \leftarrow & 1, \end{array}$$

où les flèches verticales désignent les projections naturelles.

Comme on le sait (voir **6.3**) le groupe $\widetilde{G}_1$ est entièrement défini par son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ qui est l'extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à l'aide de l'algèbre de Lie $\mathbf{R}$ de dimension 1.

Pour les extensions des algèbres de Lie on peut construire une théorie analogue à la théorie des extensions des groupes, décrite au **2.4**. Citons ici le résultat définitif sous une forme qui sera utile par la suite. Soient $Z^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions réelles bilinéaires antisymétriques c sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui possèdent la propriété

$$c([X_1, X_2], X_3) + c([X_2, X_3], X_1) + c([X_3, X_1), X_2) = 0, \quad (3)$$

$B^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ le sous-espace de $Z^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ composé de fonctions de la forme

$$c(X_1, X_2) = \langle F, [X_1, X_2]\rangle, \quad F \in \mathfrak{g}^*. \quad (4)$$

L'espace quotient $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = Z^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})/B^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ s'appelle espace des cohomologies de dimension deux de l'algèbre $\mathfrak{g}$ à coefficients dans $\mathbf{R}$.

Théorème 1. *Il existe une bijection entre les éléments de* $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ *et les classes d'extensions équivalentes de l'algèbre* $\mathfrak{g}$ *à l'aide de* $\mathbf{R}$.

Plus exactement, *à la classe* $h \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ *contenant l'élément* $c \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ *correspond la classe des extensions équivalentes qui contient l'extension donnée par la formule*

$$[(X_1, t_1), (X_2, t_2)] = [(X_1, X_2], c(X_1, X_2)),$$
$$X_i \in \mathfrak{g}, \quad t_i \in R, \quad i = 1, 2.$$

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *est la somme d'une sous-algèbre semi-simple* $\mathfrak{g}_1$ *et d'un idéal résoluble* $\mathfrak{g}_2$, $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ *est isomorphe au sous-espace de* $H^2(\mathfrak{g}_2, \mathbf{R})$ *engendré par les cocycles* $c \in Z^2(\mathfrak{g}_2, \mathbf{R})$ *qui possèdent la propriété*

$$c([X_1, Y], X_2) = c(X_1, [Y, X_2]), \quad X_i \in \mathfrak{g}_2, \quad Y \in \mathfrak{g}_1. \tag{5}$$

Corollaire. *Chaque représentation projective d'un groupe de Lie connexe et simplement connexe semi-simple s'obtient d'une représentation linéaire du même groupe.*

En effet, de la dernière assertion du théorème 1 il découle que $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = 0$ pour une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Par conséquent, l'algèbre $\mathfrak{g}_1$ sera dans ce cas la somme directe de $\mathfrak{g}$ et de $\mathbf{R}$, et le groupe G_1 sera le produit direct de G et de $\mathbf{R}$.

L'exercice ci-dessous est utile pour une meilleure assimilation des faits exposés dans ce numéro.

Problème 3. Soient P le groupe de toutes les transformations affines de l'espace réel de dimension quatre ne modifiant pas la forme quadratique $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2$ (le groupe de Poincaré) et P_0 la composante connexe de l'unité dans P.

Construire l'extension universelle G du groupe P_0 linéarisant toutes les représentations projectives de ce groupe (cf. le théorème 1 de 14.2).

Indication. L'ensemble de toutes les matrices complexes d'ordre 3 de la forme

$$X = \begin{pmatrix} a & c & u \\ c & -a & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec l'opération de commutation

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$$

est une réalisation utile de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ du groupe P.

La sous-algèbre $\mathfrak{p}_1$, définie par la condition $u = v = 0$, est semi-simple et correspond au sous-groupe des transformations homogènes (transformations de Lorentz). L'idéal $\mathfrak{p}_2$, défini par la condition $a = c = 0$, correspond au sous-groupe des translations. Chaque forme bilinéaire antisymétrique c sur $\mathfrak{p}_2$ qui satisfait à la condition (5) est de la forme

$$c(X_1, X_2) = \operatorname{Re} \lambda (u_1v_2 - v_1u_2), \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

L'extension universelle correspondante peut être réalisée par des matrices complexes de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -v & u & w \\ 0 & a & b & u \\ 0 & c & -a & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe G correspondant à cette algèbre de Lie admet une interprétation géométrique très simple: c'est le sous-groupe de Sp (4, C) qui laisse invariant un vecteur non nul.

P r o b l è m e 4. Trouver l'extension universelle du groupe des isométries du plan.

I n d i c a t i o n. Démontrer l'analogue du théorème 1 pour le cas où $\mathfrak{g}_1$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe de rotations, et $\mathfrak{g}_2$ l'algèbre de Lie du sous-groupe des translations.

§ 15. LA MÉTHODE DES ORBITES

La méthode des orbites repose sur le « fait expérimental » suivant: la théorie des représentations unitaires de dimension infinie de chaque groupe de Lie est intimement liée à une certaine représentation particulière de dimension finie de ce groupe. Cette représentation agit dans l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe considéré G. Nous appellerons cette représentation *coadjointe* ou, plus brièvement, *K-représentation.*

Les orbites d'un groupe de Lie dans l'espace de la K-représentation sont des variétés simplectiques. Elles peuvent être interprétées comme espaces de phases d'un système mécanique hamiltonien, pour lequel le groupe de Lie donné est un groupe de symétrie.

Il s'avère que les représentations unitaires irréductibles du groupe G sont liées aux orbites de ce groupe dans la K-représentation. Pour la construction d'une représentation à partir d'une orbite voir **15.3.**

Elle est la généralisation de la procédure de quantification bien connue en mécanique quantique. Pour plus de détails voir **15.4.**

Selon l'opinion personnelle de l'auteur l'importance de la méthode des orbites réside non seulement dans les théorèmes précis déjà obtenus, mais aussi dans toute une série de règles heuristiques fort simples et concrètes servant à résoudre les questions fondamentales de la théorie des représentations. Avec le temps ces règles se mettront sous la forme de théorèmes rigoureux, mais aujourd'hui même leur utilité est hors de doute.

Dans le numéro **15.5**, nous montrerons comment la projection naturelle $p\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$, où $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe H, permet de décrire les opérations de restriction au sous-groupe H et d'induction à partir de ce sous-groupe.

Les caractères généralisés des représentations unitaires irréductibles admettent, comme nous le verrons dans **15.6**, la forme fort simple d'une intégrale de l'orbite correspondante. Ceci permet souvent de mettre la mesure de Plancherel sous une forme explicite.

Nous montrerons enfin, dans **15.7** que les caractères infinitésimaux des représentations unitaires irréductibles du groupe G peuvent être calculés comme valeurs des polynômes G-invariants sur les orbites correspondantes.

15.1. Représentation coadjointe d'un groupe de Lie. Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$, l'espace dual à $\mathfrak{g}$. Le groupe G agit sur $\mathfrak{g}$ à l'aide de la représentation adjointe Ad (voir **6.3**) et dans $\mathfrak{g}^*$ à l'aide de la représentation coadjointe, ou brièvement, de la K-représentation.

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est réalisée sous forme d'une algèbre de champs de vecteurs invariants à gauche sur G, il est alors naturel de réaliser $\mathfrak{g}^*$ sous forme de l'espace des formes différentielles d'ordre un invariantes à gauche sur G. La K-représentation du groupe G agit dans l'espace des 1-formes par translations à droite.

Etudions en détail un exemple qui sera d'ailleurs utile dans le cas général. Soit $G = GL(n, \mathbf{C})$ le groupe de toutes les matrices complexes non dégénérées d'ordre n. Puisque G est un sous-ensemble ouvert dans l'espace vectoriel $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ de toutes les matrices, nous pouvons identifier l'espace tangent à G dans un point quelconque $g \in G$ avec $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$. Alors, le champ vectoriel sur G sera simplement une fonction matricielle.

P r o b l è m e 1. Démontrer que chaque champ de vecteurs invariants à gauche sur G est de la forme

$$v_A(X) = XA, \quad A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}), \tag{1}$$

et que le champ v_A est envoyé par la translation à droite par l'élément $Y \in G$ dans le champ $v_{Y^{-1}AY}$.

I n d i c a t i o n. Vérifier que le champ $v(X)$ sur G est envoyé par la translation par Y_1 à gauche et par Y_2 à droite dans le champ $v'(X) = Y_1 v(Y_1^{-1}XY_2^{-1})Y_2$.

Il est bien commode d'identifier l'espace dual à $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ avec $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ à l'aide de la forme linéaire (sur $\mathbf{R}$)

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, XY. \tag{2}$$

Alors, les 1-formes sur G s'écriront également comme fonctions matricielles.

P r o b l è m e 2. Démontrer que chaque 1-forme invariante à gauche sur G s'écrit

$$\omega_B(X) = BX^{-1}, \qquad B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}) \tag{3}$$

et que la forme ω_B est envoyée par translation à droite par l'élément $Y \in G$ dans la forme $\omega_{YBY^{-1}}$.

Par conséquent, dans l'exemple considéré, la K-représentation est équivalente à la représentation adjointe et les orbites du groupe G dans la K-représentation sont des classes des matrices semblables.

Supposons maintenant que G est un groupe de Lie quelconque. Remplaçant, s'il le faut, G par un groupe localement isomorphe, nous pouvons supposer que G soit un sous-groupe de $GL(n, \mathbf{C})$ (voir **6.2**).

Il est à remarquer que toute K-représentation transforme les éléments du centre du groupe en opérateurs identiques. Par conséquent, les K-représentations transforment les groupes localement isomorphes en groupes linéaires isomorphes.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G sera alors une sous-algèbre de $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$.

Soient $\mathfrak{g}^\perp$ le supplément orthogonal à $\mathfrak{g}$ par rapport à la forme bilinéaire (2), V un sous-espace quelconque de $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$, supplémentaire à $\mathfrak{g}^\perp$ et P le projecteur sur V parallèle à $\mathfrak{g}^\perp$. On peut alors identifier $\mathfrak{g}^*$ à V de sorte que la K-représentation s'écrive sous la forme

$$K(g)X = P(gXg^{-1}), \quad X \in V, \ g \in G. \tag{4}$$

E x e m p l e. Si G est le sous-groupe de $GL(n, \mathbf{C})$ formé de toutes les matrices réelles triangulaires supérieures avec des unités sur la diagonale principale, on peut alors prendre pour V le sous-espace des matrices réelles triangulaires inférieures avec des zéros sur la diagonale principale. L'action de l'opérateur P consiste dans ce cas à remplacer tous les éléments situés sur ou au-dessus de la diagonale principale par des zéros.

Notons $\mathcal{O}(G)$ l'ensemble des orbites du groupe de Lie G dans la K-représentation, muni de la topologie quotient de la topologie naturelle dans $\mathfrak{g}^*$. L'espace topologique $\mathcal{O}(G)$ n'est pas en général séparé. Dans les exemples considérés ci-dessus, il est semi-séparé. On peut citer des exemples de groupes G (voir **19.2**) pour lesquels $\mathcal{O}(G)$ ne sera même pas semi-séparé.

Passons maintenant à l'étude des orbites d'un groupe de Lie G dans une K-représentation. Montrons maintenant que chacune de ces orbites possède une 2-forme fermée non dégénérée G-invariante.

Il nous faudra quelques renseignements d'ordre général sur les formes différentielles sur les variétés homogènes.

Soient G un groupe de Lie, H son sous-groupe fermé et $M = H \diagdown G$ la variété homogène des classes d'équivalence à droite de G par H. Notons p la projection naturelle de G sur M faisant correspondre au point g la classe Hg. L'application dérivée $p_*(e)$ est un opérateur linéaire de l'algèbre $\mathfrak{g}$ du groupe G dans l'espace tangent à M au point origine H. Il est clair que le noyau de cet opérateur coïncide avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ du sous-groupe H. Par conséquent, l'espace tangeant $T_H M$ s'identifie à l'espace quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. L'isométrie $g \in G$ applique le point H dans Hg. L'application dérivée $g_*(H)$ est un isomorphisme de $T_H M$ sur $T_{Hg} M$ et l'application duale $g^*(H)$ sera un isomorphisme de $T^*_{Hg} M$ sur $T^*_H M$. Utilisant ces

isomorphismes, nous pouvons définir les champs de tenseurs sur M en forme de fonctions sur G à valeurs dans l'algèbre tensorielle sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. A savoir, si Φ est un champ de tenseurs de rang (k, l) sur M, la valeur de la fonction φ au point $g \in G$ sera le tenseur $\varphi(g)$ de rang (k, l) sur $T_H M$ prenant sur les vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_l$ et les covecteurs $\eta_1, \ldots, \eta_k$ une valeur égale à

$$\Phi(Hg)(g_*(H)\xi_1, \ldots, g_*(H)\xi_l, g^*(H)^{-1}\eta_1, \ldots, g^*(H)^{-1}\eta_k). \qquad (5)$$

Problème 3. Démontrer que la fonction φ sur G à valeurs dans $T^{k,l}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ correspond à un champ de tenseurs de rang (k, l) sur M si et seulement si elle satisfait à la condition

$$\varphi(hg) = \rho_{kl}(h)\varphi(g), \qquad (6)$$

où $\rho_{k,l}$ est la représentation naturelle de H dans $T^{k,l}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ engendrée par la représentation adjointe de H dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Indication. Utiliser la formule (5) pour retrouver Φ à partir de φ et montrer que Φ est bien défini, si et seulement si on a la condition (6).

En particulier, les formes différentielles d'ordre l sur M se définissent par les fonctions sur G à valeurs dans

$$\Lambda^l((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*) \approx \Lambda^l(\mathfrak{h}^\perp),$$

qui satisfont à la condition

$$\varphi(hg) = \rho_l(h)\varphi(g), \qquad (6')$$

où ρ_l est la l-ième puissance extérieure de la représentation naturelle de H dans l'espace $\mathfrak{h}^\perp$.

La notation introduite ci-dessus permet de mettre les isométries de G sous une forme particulièrement simple.

Problème 4. Démontrer que si le champ de tenseurs Φ correspond à la fonction φ, alors le champ obtenu de Φ à l'aide de la translation par $g \in G$ correspond à la fonction obtenue de φ à l'aide de la translation à droite par g.

Il est à remarquer que la liaison, décrite ci-dessus, entre les champs de tenseurs et les fonctions est un cas particulier de l'interprétation des sections des G-fibrations sur $H\diagdown G$ comme fonctions vectorielles sur G transformées d'une manière donnée par les translations à gauche sur H (voir 13.4).

Corollaire. *Les formes différentielles G-invariantes sur $M = H\diagdown G$ correspondent d'une façon unique aux éléments H-invariants de $\Lambda(\mathfrak{h}^\perp)$.*

En effet, du problème 4 il découle qu'à chaque forme G-invariante correspond une fonction constante sur G à valeurs dans $\Lambda(\mathfrak{h}^\perp)$ et de la condition (6) que la valeur de cette fonction est un élément H-invariant.

Problème 5. Supposons qu'à la k-forme invariante Φ sur $M = H\backslash G$ corresponde la forme extérieure $\varphi \in \bigwedge^k (\mathfrak{h}^\perp)$. Alors, à la différentielle $d\Phi$ correspondra la forme $d\varphi \in \bigwedge^{k+1} (\mathfrak{h}^\perp)$ donnée par la formule

$$d\varphi (X_1, \ldots, X_{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \varphi ([X_i, X_j], \ldots \hat{X}_i, \ldots \hat{X}_j, \ldots). \qquad (7)$$

Indication. Utiliser la formule (3) de 5.3, la relation

$$L_\xi \iota (\eta) - \iota (\eta) L_\xi = \iota ([\xi, \eta])$$

et le fait que si la forme Φ est G-invariante et le champ de vecteurs ξ correspond à l'élément X de l'algèbre de Lie du groupe G, alors $L_\xi \Phi = 0$. Comparer aussi à la formule (4) de 5.3.

Revenons à l'étude des orbites d'un groupe de Lie G dans la K-représentation.

Soient Ω une de ces orbites, F un point quelconque de Ω et G_F le stabilisateur de ce point.

Problème 6. Démontrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_F$ du groupe G_F coïncide avec le noyau de la forme bilinéaire antisymétrique B_F sur $\mathfrak{g}$, définie par la formule

$$B_F (X, Y) = \langle F, [X, Y] \rangle. \qquad (8)$$

Indication. Le noyau de la forme B_F se compose, par définition, des éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que $B_F (X, Y) = 0$ pour tous les Y dans $\mathfrak{g}$.

Démontrer la relation

$$B_F (X, Y) = \left\langle \frac{d}{dt} K (\exp tX) F \Big|_{t=0}, Y \right\rangle \qquad (9)$$

et en déduire l'assertion du problème.

Vu que la valeur de $B_F (X, \Sigma)$ ne dépend que des images de X et de Y dans l'espace quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$, nous obtenons une forme linéaire antisymétrique sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$ que nous noterons $\widetilde{B}_F$. Le noyau de cette forme B_F est l'image dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$ du noyau de la forme B_F et, d'après le problème 6, est nul. Par conséquent, la forme $\widetilde{B}_F$ est non dégénérée.

Problème 7. Démontrer que $\widetilde{B}_F$ est un élément G-invariant dans $\bigwedge^2 (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F)^*$.

Indication. Utiliser la définition de G_F et les relations

$$\rho_2 (g) \widetilde{B}_F (X, Y) = \widetilde{B}_F (Ad (g^{-1}) X, Ad (g^{-1}) Y) = \langle K (g) F, [X, Y] \rangle. \qquad (10)$$

Du problème 6 et du corollaire au problème 4, il découle que $\Omega = G_F \backslash G$ possède une 2-forme G-invariante non dégénérée B_Ω, correspondant à l'élément G-invariant $\widetilde{B}_F$ dans $\bigwedge^2 (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F)^*$.

Notre construction de la forme B_Ω dépendait du choix du point F. Montrons maintenant que la forme B_Ω elle-même ne dépend pas de ce choix. Ceci découle de l'expression explicite suivante pour B_Ω.

Problème 8. Supposons que ξ_X désigne le champ de vecteurs sur Ω qui correspond à l'élément $X \in \mathfrak{g}$. Alors, pour chaque point $F' \in \Omega$, nous avons l'égalité

$$B_\Omega(F')(\xi_X(F'), \xi_Y(F')) = \langle F', [X, Y]\rangle. \qquad (11)$$

Indication. Utiliser la formule (5) et le fait que le vecteur $\xi_X(F)$ est envoyé par l'identification de $T_F\Omega$ avec $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$ dans $X \bmod \mathfrak{g}_F$.

Montrons maintenant que la forme B_Ω est fermée. En calculant le différentiel de cette forme d'après la formule (7) du problème 5, nous obtenons l'expression

$$\frac{1}{3}[B_F([X, Y], Z) + B_F([Y, Z], X) - B_F([X, Z], Y)] =$$

$$= \frac{1}{3}\langle F [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y]\rangle$$

qui est nulle d'après l'identité de Jacobi. Par conséquent, $dB_\Omega = 0$ et la forme B_Ω est fermée.

Enonçons le résultat de nos raisonnements.

Théorème 1. *Sur chaque orbite Ω du groupe de Lie G dans sa K-représentation il existe une 2-forme non dégénérée fermée G-invariante B_Ω, définie par la formule* (11).

Formulons le corollaire géométrique évident du théorème 1.

Toutes les G-orbites de la K-représentation sont de dimension paire.

En effet, une forme antisymétrique non dégénérée ne peut exister que dans un espace de dimension paire.

15.2. Variétés simplectiques homogènes. On appelle *variété simplectique* une variété réelle différenciable M de dimension paire munie d'une 2-forme différentielle fermée non dégénérée B.

Comme exemple de variété simplectique citons l'espace T^*N du fibré cotangent sur une variété quelconque N. La forme B se définit sur T^*N de la manière suivante.

Soient $\tilde{U}$ une carte quelconque sur N et $q_1, \ldots, q_k$ les coordonnées locales correspondantes. Dans chaque espace T_m^*N, $m \in \tilde{U}$ choisissons les coordonnées $p_1, \ldots, p_k$ qui correspondent à la base $\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_k}$ de T_mN.

Alors, la famille $(q_1, \ldots, q_k; p_1, \ldots, p_k)$ sera un système de coordonnées locales dans le domaine $U \subset T^*N$ qui est l'image

réciproque de $\widetilde{U}$ par rapport à la projection naturelle $p: T^*N \to N$. Munissons U d'une 1-forme différentielle σ_U en posant

$$\sigma_U = \sum_{i=1}^{k} p_i dq_i. \tag{1}$$

Problème 1. Soient $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ deux cartes quelconques sur N, U et V les cartes correspondantes dans T^*N. Démontrer que les formes σ_U et σ_V coïncident sur l'intersection des domaines U et V.

Indication. Soient $(q_1, \ldots, q_k; p_1, \ldots, p_k)$ les coordonnées dans le domaine U, et $(\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_k; \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_k)$ les coordonnées dans le domaine V. Il est clair que les $\widetilde{q}_i$ sont des fonctions qui ne dépendent que de $q_1, \ldots, q_k$, tandis que les $\widetilde{p}_i$ dépendent linéairement de $p_1, \ldots, p_k$. Démontrer que

$$\widetilde{p}_i(q_1, \ldots, q_k; p_1, \ldots, p_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial q_j}{\partial \widetilde{q}_i} p_j.$$

Ainsi, la variété T^*N se trouve munie d'une 1-forme unique σ dont la restriction à une carte quelconque U coïncide avec σ_U.

Posons $B = d\sigma$. Alors B est une forme fermée car $dB = d^2\sigma = 0$. En outre, la forme B est non dégénérée puisque dans le système de coordonnées locales U, elle s'écrit

$$B_U = \sum_{i=1}^{k} dp_i \wedge dq_i. \tag{2}$$

L'existence d'une 2-forme non dégénérée permet de construire une bijection entre les champs de vecteurs et de covecteurs sur une variété simplectique. A savoir, à chaque champ de vecteurs ξ correspond le champ de covecteurs (c'est-à-dire la 1-forme) $\iota(\xi) B$ (pour la définition de l'opération $\iota(\xi)$ voir 5.3).

Appelons *hamiltonien* le champ de vecteurs ξ sur une variété simplectique M munie de la forme B si

$$L_\xi B = 0. \tag{3}$$

Autrement dit, le champ ξ est hamiltonien si la famille des transformations induite par ce champ ne modifie pas la forme B.

Problème 2. Démontrer qu'un champ de vecteurs est hamiltonien si et seulement si la 1-forme correspondante $\iota(\xi) B$ est fermée.

Indication. Utiliser la formule (3) de 5.3.

Appelons *strictement hamiltonien* le champ ξ si la 1-forme $\iota(\xi) B$ est exacte, c'est-à-dire

$$\iota(\xi) B + dF = 0 \tag{4}$$

pour une certaine fonction F sur M. La fonction F s'appelle fonction génératrice du champ ξ et se définit par l'égalité (4) à une constante additive près. Chaque fonction réelle F sur M est la fonction génératrice d'un champ strictement hamiltonien sur M que nous noterons ξ_F.

Problème 3. Démontrer que le commutateur de deux champs de vecteurs hamiltoniens est un champ de vecteurs strictement hamiltonien.

Indication. Prendre pour la fonction génératrice du champ $[\xi, \eta]$, $\iota(\xi)\,\iota(\eta)\,B = 2B(\xi, \eta)$. Utiliser l'indication au problème 6 de 15.1.

Soient F et G deux fonctions réelles différenciables sur M. Nous avons alors les égalités

$$\xi_F G = 2B(\xi_F, \xi_G) = -\xi_G F. \tag{5}$$

En effet, $\xi_F G = -\langle dG, \xi_F\rangle = -(\iota(\xi_G)\,B)(\xi_F) = -2B(\xi_G, \xi_F) = 2B(\xi_F, \xi_G)$; la deuxième égalité se démontre d'une manière analogue.

La valeur commune des trois expressions de (5) s'appelle *produit de Poisson* des fonctions F et G et s'écrit $\{F, G\}$.

Problème 4. Démontrer que si dans un certain système de coordonnées locales la forme B s'écrit de la manière (2), le produit de Poisson se définit par l'égalité :

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right). \tag{6}$$

En fait, l'hypothèse du problème n'est pas nécessaire. D'après le théorème bien connu de Darbout, chaque 2-forme fermée non dégénérée est, dans un système de coordonnées locales convenablement choisi, de la forme (2).

Remarquons que si le groupe des cohomologies de dimension 1 $H^1(M, \mathbf{R})$ de la variété M est trivial, alors chaque 1-forme fermée est exacte et, par conséquent, chaque champ de vecteurs hamiltonien est strictement hamiltonien. Dans le cas général, les champs strictement hamiltoniens forment un sous-espace $H_0(M)$ dans l'espace $H(M)$ de tous les champs hamiltoniens. La codimension de $H_0(M)$ dans $H(M)$ est égale au rang $b_1(M)$ du groupe $H^1(M, \mathbf{R})$.

L'espace $C^\infty(M, \mathbf{R})$ des fonctions réelles différenciables sur M est une algèbre de Lie de dimension infinie par rapport au produit de Poisson. En effet, l'identité de Jacobi

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \tag{7}$$

découle des considérations suivantes.

Vu que $F \to \xi_F$ se définit par la forme B, elle est permutable à toutes les transformations qui ne modifient pas cette forme: de telles transformations s'appellent *canoniques*. Mais chaque champ hamiltonien η est la dérivée locale d'une certaine famille de transformations canoniques. Nous avons donc l'égalité

$$\xi_{L_\eta F} = L_\eta \xi_F$$

ou

$$\xi_{\eta F} = [\eta, \xi_F].$$

En remplaçant η par le champ ξ_G et appliquant les deux membres de l'égalité obtenue à la fonction H, nous obtenons l'identité cherchée (7).

Problème 5. Démontrer que l'application $F \mapsto \xi_F$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $C^\infty(M, \mathbf{R})$ dans l'algèbre de Lie $H_0(M)$.

Indication. L'égalité

$$\xi_{\{F, G\}} = [\xi_F, \xi_G] \tag{8}$$

à démontrer se transforme, en appliquant ses deux membres à une fonction quelconque $H \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, dans l'identité (7).

Ainsi, nous avons une suite exacte d'algèbres de Lie:

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \xrightarrow{i} C^\infty(M, \mathbf{R}) \xrightarrow{j} H_0 M \rightarrow 0, \tag{9}$$

où i est l'inclusion naturelle de $\mathbf{R}$ dans $C^\infty(M, \mathbf{R})$ en forme de sous-espace des constantes, et j applique F dans ξ_F.

Supposons maintenant que la variété M soit munie d'une action transitive du groupe de Lie G, telle que toutes les transformations de ce groupe sont canoniques (ne modifient pas la forme B). Nous dirons alors que M est une variété simplectique *homogène*. A chaque élément X de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G correspond alors un champ hamiltonien ξ_X sur M.

Si tous les champs ξ_X, $X \in \mathfrak{g}$ sont strictement hamiltoniens et les fonctions génératrices F_X de ces champs peuvent être choisies de sorte à satisfaire à l'égalité:

$$F_{[X, Y]} = \{F_X, F_Y\}, \tag{10}$$

alors nous dirons que M est une variété simplectique *strictement homogène*.

Autrement dit, une variété homogène simplectique s'appellera strictement homogène si nous avons le diagramme commutatif d'algèbres de Lie suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & R & \rightarrow & C^\infty(M, \mathbf{R}) & \rightarrow & H_0(M) & \rightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\ & & & & \mathfrak{g} & \longrightarrow & H(M) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & H^1(M, R) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Comme exemple de variété simplectique strictement homogène à groupe d'isométries G citons toute orbite du groupe G dans sa K-représentation.

En effet, comme nous l'avons vu dans **15.1**, chacune de telles orbites Ω est une variété simplectique homogène. Il reste à vérifier que Ω est une variété simplectique strictement homogène. Ceci découle du fait suivant.

P r o b l è m e 6. Soit η_X le champ de vecteurs sur Ω qui correspond à l'élément $X \in \mathfrak{g}$. Alors, pour fonction génératrice φ_X de ce champ nous pouvons prendre la restriction sur Ω de la fonction linéaire $F \mapsto \langle F, X\rangle$ sur $\mathfrak{g}^*$.

On a l'identité

$$\{\varphi_X, \varphi_Y\} = \varphi_{[X, Y]}.$$

I n d i c a t i o n. La première assertion découle de la définition de la forme B_Ω et de la fonction génératrice, la deuxième de l'égalité (5).

Il se trouve qu'outre les orbites de K-représentation il n'y a plus, au fond, d'autres variétés simplectiques strictement homogènes, dont le groupe d'isométries est le groupe de Lie connexe G. En effet, soit M une telle variété. Désignons, comme nous l'avons fait plus haut, par F_X la fonction génératrice du champ de vecteurs ξ_X sur M correspondant à l'élément X de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G et supposons que la relation (10) soit satisfaite.

Considérons l'application φ: $M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ définie par la formule

$$\langle \varphi(m), X\rangle = F_X(m). \qquad (11)$$

P r o b l è m e 7. Démontrer que l'application φ est permutable à l'action du groupe G.

I n d i c a t i o n. Vu que G est connexe, il suffit de démontrer que φ permute aux éléments de la forme $\exp Y$, $Y \in \mathfrak{g}$. Pour cela, il est à son tour suffisant de vérifier que l'application dérivée φ_* envoie le champ de vecteurs ξ_Y sur M dans le champ de vecteur η_Y sur $\mathfrak{g}^*$. Mais ceci découle de (10).

P r o b l è m e 8. Démontrer que l'application φ est un homéomorphisme local de M sur une des G-orbites de $\mathfrak{g}^*$.

I n d i c a t i o n. Le fait que $\varphi(M)$ est une G-orbite de $\mathfrak{g}^*$ se déduit du problème 7. Parmi les champs ξ_X, $X \in \mathfrak{g}$, il existe dans chaque point $m \in M$ des champs indépendants $\xi_{X_1}, \ldots, \xi_{X_k}$ où $k = \dim M$. Leurs fonctions génératrices $F_{X_1}, \ldots, F_{X_k}$ possèdent des différentiels linéairement indépendants dans ce point. L'application φ est donc un homéomorphisme local.

Ainsi, la variété M est un « revêtement » d'une certaine orbite Ω du groupe G dans $\mathfrak{g}^*$. Si l'orbite Ω est simplement connexe, alors elle ne possède aucun revêtement connexe non trivial. Dans le cas contraire, comme on le sait, il y a autant de revêtements que de sous-groupes dans le groupe fondamental $\pi_1(\Omega)$. Chaque revêtement s'obtient par factorisation du revêtement universel (simplement connexe) $\widetilde{\Omega}$ par un sous-groupe correspondant $\Gamma \subset \pi_1(\Omega)$ (voir 6.1).

Le résultat obtenu permet de décrire, en termes d'orbites, toutes les variétés simplectiques homogènes dont le groupe d'isométries est un groupe de Lie connexe G.

Si M est une telle variété, son revêtement universel $\widetilde{M}$ sera une variété simplectique homogène par rapport au groupe $\widetilde{G}$, le revêtement universel du groupe G.

Chaque champ hamiltonien sur $\widetilde{M}$ sera strictement hamiltonien, mais les fonctions génératrices des champs ξ_X, $X \in \mathfrak{g}$, ne satisfont, en général, à la relation (10) qu'à une constante additive près.

Considérons l'algèbre de Lie (par rapport au produit de Poisson) engendrée par toutes les fonctions génératrices de tous les champs ξ_X, $X \in \mathfrak{g}$. Il est évident que cette algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ est l'extension de $\mathfrak{g}$ à l'aide de $\mathbf{R}$. Soit G_1 le groupe de Lie simplement connexe correspondant.

P r o b l è m e 9. Démontrer que la variété $\widetilde{M}$ est une variété hamiltonienne strictement homogène par rapport au groupe G.

I n d i c a t i o n. Définir l'action de G_1 sur M de sorte qu'elle applique les éléments du sous-groupe invariant correspondant à l'idéal $\mathbf{R} \subset \mathfrak{g}_1$ dans la transformation identique.

Ainsi, nous avons démontré le théorème suivant.

T h é o r è m e 1. *Chaque variété simplectique homogène dont le groupe des isométries est un groupe de Lie connexe G est localement isomorphe à l'orbite dans une K-représentation du groupe G ou de son extension centrale à l'aide de* $\mathbf{R}$.

15.3. Construction de la représentation unitaire irréductible par son orbite. Toutes les méthodes de construction des représentations irréductibles de groupes connues jusqu'à présent consistent

à appliquer (maintes fois peut-être) les trois opérations fondamentales suivantes :

1) restriction à un sous-groupe,

2) prolongement à partir d'un sous-groupe,

3) induction à partir d'un sous-groupe (ainsi que les différentes généralisations de cette action ; voir **13.4**).

Ces opérations permettent d'obtenir, à partir d'un nombre restreint de représentations « élémentaires », toutes les autres. Pour les groupes de Lie (ainsi que pour les groupes finis), en tant que représentations élémentaires, on peut probablement considérer les représentations de dimension 1 ; mais cette hypothèse n'est pas démontrée.

Nous ne considérerons ici que le cas où la représentation irréductible du groupe G s'obtient d'une représentation de dimension 1 par une seule réalisation de l'opération d'induction ou de ses généralisations: l'induction holomorphe ou la représentation dans les cohomologies.

Comme nous l'avons vu dans **13.4**, chaque représentation T se définit par la famille $(\mathfrak{n}, H, \rho, U)$, où $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}_c$, l'enveloppe complexe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G; H, un sous-groupe fermé de G dont l'algèbre de Lie est de la forme $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}$; ρ, une représentation holomorphe de dimension 1 de $\mathfrak{n}$ donnée par la formule

$$\rho (X) = 2\pi i \langle F, X\rangle, \qquad F \in \mathfrak{g}^*, \tag{1}$$

et U est une représentation unitaire de dimension 1 de H qui, dans un voisinage de l'unité, est de la forme

$$U (\exp X) = e^{\rho(X)}. \tag{2}$$

Nous dirons qu'à la *représentation* T *correspond l'orbite* Ω du groupe G dans $\mathfrak{g}^*$ qui passe par le point F.

Examinons la possibilité du passage inverse : de l'orbite à la représentation.

Nous supposerons le groupe G connexe et simplement connexe. Soit Ω l'une des orbites du groupe G dans $\mathfrak{g}^*$. Choisissons dans Ω un point quelconque F et notons G_F son stabilisateur dans G et $\mathfrak{g}_F$ l'algèbre de Lie du groupe G_F. Comme nous l'avons vu dans **15.1**, $\mathfrak{g}_F$ coïncide avec le noyau de la forme bilinéaire antisymétrique

$$B_F (X, Y) = \langle F [X, Y]\rangle. \tag{3}$$

Nous appellerons la sous-algèbre $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ subordonnée à la forme $F \in \mathfrak{g}^*$, si la forme B_F est identiquement nulle sur $\mathfrak{n}$. Cette définition est également valable pour les sous-algèbres complexes de $\mathfrak{g}_c$, si l'on suppose que la forme B_F se prolonge sur $\mathfrak{g}_c$ par linéarité.

P r o b l è m e 1. Démontrer que la sous-algèbre $\mathfrak{n}$ est subordonnée à F, si et seulement si l'application

$$X \longmapsto \langle F, X \rangle$$

est une représentation de dimension 1 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$.

De l'énoncé du problème et de l'égalité (1) il s'ensuit que la sous-algèbre $\mathfrak{n}$ de la définition de la représentation T est subordonnée à F.

P r o b l è m e 2. Démontrer que la codimension dans $\mathfrak{g}$ (respectivement, la codimension complexe dans $\mathfrak{g}_c$) de la sous-algèbre réelle $\mathfrak{n} \in \mathfrak{g}$ (respectivement, la sous-algèbre complexe $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_c$), subordonnée à la forme $F \in \mathfrak{g}^*$, n'est pas plus petite que la moitié de la dimension de la G-orbite Ω dans $\mathfrak{g}^*$ qui passe par le point F.

I n d i c a t i o n. Dans $\mathfrak{g}_c$ la codimension du sous-espace isotrope maximal pour B_F est égale à

$$1/2 \operatorname{rang} B_F = 1/2 (\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_F) = 1/2 \dim \Omega.$$

Il se trouve que, dans tous les cas connus, lorsque la sous-algèbre $\mathfrak{n}$ est liée à la représentation irréductible T du groupe G, la borne inférieure indiquée au problème 2 s'avère atteinte, c'est-à-dire

$$\operatorname{codim} \mathfrak{n} = 1/2 \dim \Omega, \tag{4}$$

et, en outre, la sous-algèbre $\mathfrak{n}$ possède la propriété suivante (dite la propriété de Poukanski: cf. p. 280):

$$F + \mathfrak{n}^\perp \subset \Omega, \tag{5}$$

où $\mathfrak{n}^\perp$ est l'annulateur de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}^*$ (c'est-à-dire l'ensemble de toutes les formes $F \subset \mathfrak{g}^*$, dont les prolongements à $\mathfrak{g}_c$ s'annulent sur $\mathfrak{n}$).

Géométriquement, la condition (5) signifie que l'orbite Ω contient, avec le point F, la sous-variété linéaire $p^{-1}(pF)$, où p est la projection naturelle de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{n}^*$.

Appelons la sous-algèbre $\mathfrak{n}$ subordonnée à F *admissible* si elle possède les propriétés (4) et (5).

P r o b l è m e 3. Démontrer que si pour la forme $F \in \Omega$ il existe une sous-algèbre réelle (respectivement complexe) admissible, tous les autres points de Ω possèdent cette propriété.

I n d i c a t i o n. Si $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre admissible pour F, Ad $g\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre admissible pour $K(g) F$.

Ainsi, l'existence des sous-algèbres admissibles pour $F \in \mathfrak{g}^*$ est une propriété de l'orbite Ω contenant F. Les sous-algèbres admissibles n'existent pas toujours.

Soient $Sp(2n + 2, \mathbf{R})$ le groupe simplectique (voir 5.1) et $G = St(n, \mathbf{R})$ son sous-groupe qui laisse sur place un vecteur non nul dans $\mathbf{R}^{2n+2}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{st}(n, \mathbf{R})$ de ce groupe peut être réalisée par les matrices de la forme

$$X(A, \xi, c) = \begin{pmatrix} 0 & \xi' & c \\ 0 & A & J\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où $A \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbf{R})$, $\xi \in \mathbf{R}^{2n}$, $c E \mathbf{R}$ et J est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$.

Posons

$$F_\lambda(X(A, \xi, c)) = \lambda c, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Alors, pour $\lambda \neq 0$ il n'existe pas de sous-algèbre admissible de $\mathfrak{g}_c$, subordonnée à F_λ. En effet, la forme B_{F_λ} s'écrit

$$B_{F_\lambda}(X(A_1, \xi_1, c_1), X(A_2, \xi_2, c_2)) = 2\lambda \xi_1' J \xi_2 \tag{7}$$

et, par conséquent, le sous-espace $\mathfrak{g}_{F_\lambda}$ est défini par la condition $\xi = 0$.

P r o b l è m e 4. Démontrer que chaque sous-espace isotrope maximal $\mathfrak{n}$ pour B_{F_λ} dans $\mathfrak{g}_c$ se compose d'éléments de la forme

$$X(A, \xi, c), \; A \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbf{C}), \quad \xi \in V, \; c \in \mathbf{C}, \tag{8}$$

où V est un certain sous-espace de $\mathbf{C}^{2n}$ de dimension n, isotrope par rapport à à la forme à matrice J.

I n d i c a t i o n. Utiliser la formule (7).

Vu que le groupe $Sp(2n, \mathbf{R})$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2n, \mathbf{R})$ ont une action irréductible dans $\mathbf{C}^{2n}$, aucun des sous-espaces (8) ne sera une sous-algèbre.

Le groupe $St(n, \mathbf{R})$, qui figure dans l'exemple ci-dessus, est un groupe de type général. Il possède un sous-groupe invariant résoluble $N(n)$ appelé *groupe de Heisenberg* ou *groupe spécial nilpotent* et un sous-groupe supplémentaire semi-simple isomorphe à $Sp(2n, \mathbf{R})$. Il est intéressant de noter que pour les groupes résolubles et semi-simples les sous-algèbres admissibles complexes existent toujours.

Une construction simple d'une sous-algèbre admissible fut proposée par M. Vergne [1]). Cette construction est basée sur le fait suivant :

P r o b l è m e 5. Soit $s: 0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ une suite d'espaces vectoriels, tels que $\dim V_k = k$. Supposons que V soit muni d'une forme B bilinéaire antisymétrique et B_k désigne la restriction de B à V_k. Alors $W(s, B) = \sum_{k=1}^{n} \ker B_k$ est un sous-espace de V maximal isotrope pour la forme B.

[1]) C. r. Acad. Sci. Paris, **270**, 173-175, 704-707.

I n d i c a t i o n. Démontrer par récurrence que $|\operatorname{rang} B_k - \operatorname{rang} B_{k+1}| = 1$, et démontrer par récurrence que $W(s, B) \cap V_k = W(s_k, B_k)$.

P r o b l è m e 6. Démontrer que si V est une algèbre de Lie, les sous-espaces V_k, $k = 1, \ldots, n$, sont des idéaux de V et la forme B s'écrit comme dans (3), alors $W(s, B)$ est une sous-algèbre de V.

Enonçons sans démonstration le résultat suivant de M. Vergne.

T h é o r è m e 1. *Soit G un groupe de Lie réel résoluble connexe, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Pour chaque forme $F \in \mathfrak{g}^*$ on peut alors indiquer une sous-algèbre complexe admissible $\mathfrak{n} \in \mathfrak{g}_c$, qui possède les propriétés*

1) $\mathfrak{n} = W(s, B_F)$ *pour une certaine suite s d'idéaux dans* $\mathfrak{g}_c$;

2) $\mathfrak{n}$ *est invariante par rapport au stabilisateur G_F du point F*;

3) $\mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}_c$;

4) *si $\mathfrak{r}$ est un radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{r}_c$ est une sous-algèbre admissible subordonnée à la forme* $f = F|_{\mathfrak{r}}$;

5) *si G est un groupe exponentiel, $\mathfrak{n}$ sera l'enveloppe complexe d'une certaine sous-algèbre réelle admissible $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de la forme $\mathfrak{h} = W(s_0, B_F)$, où s_0 est une certaine suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.*

Revenons au problème de la construction d'une représentation d'après l'orbite.

Nous supposons que, pour l'élément F de l'orbite Ω, il existe une sous-algèbre $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_c$ possédant les propriétés (2) et (3) du théorème 1. Nous supposons également qu'il existe des sous-groupes fermés H et M dans G, tels que $G_F \subset H \subset M$ et l'on a les relations

$$\mathfrak{n} \cap \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{h}_c, \quad \mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}_c, \quad H = G_F H^0, \tag{9}$$

où $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{m}$ sont les algèbres de Lie des groupes H et M respectivement et H^0 la composante connexe de l'unité du groupe H.

Pour construire une représentation T conformément au numéro **13.4**, nous devons avoir une représentation ρ de l'algèbre $\mathfrak{n}$ et une représentation U du groupe H, liées par l'identité

$$U(\exp X) = e^{\rho(X)}, \quad X \in \mathfrak{h}. \tag{10}$$

Pour ρ prenons la représentation donnée par l'égalité (1). La formule (10) définit alors U dans un certain voisinage de l'unité du groupe H. La question d'existence et d'unicité du prolongement de U à tout le groupe H se pose donc naturellement. Il se trouve que la réponse à cette question dépend des propriétés topologiques de l'orbite Ω. Pour énoncer le résultat exact, introduisons quelques notations. Appelons *fibre passant par le point origine F* l'ensemble S des formes

$$F_1 = K(g) F, \quad g \in H$$

P r o b l è m e 7. Démontrer que pour $g_1, g_2 \in G$ quelconques, les ensembles $K(g_1) S$ et $K(g_2) S$ sont disjoints ou bien coïncident.

I n d i c a t i o n. Utiliser le fait que $gHg^{-1} = H$ pour $g \in G_F$.
Nous obtenons ainsi la décomposition de l'orbite Ω en fibres de la forme $K(g)S$. Notons Y l'espace quotient correspondant et Γ le groupe fondamental $\pi_1(Y)$.

Appelons *entière* l'orbite Ω du groupe G dans $\mathfrak{g}^*$, si la forme B_Ω appartient à une classe de cohomologie à coefficients entiers. (Cela veut dire que l'intégrale de la forme B_Ω sur chaque cycle de dimension 2 dans Ω est égale à un nombre entier.)

T h é o r è m e 2. *Pour qu'une représentation donnée localement par l'égalité* (10) *se prolonge à une représentation unitaire de dimension* 1 *du groupe* H, *il faut que l'orbite* Ω *passant par le point* $F \in \mathfrak{g}^*$ *soit entière.*

L'ensemble des prolongements possibles, s'il n'est pas vide, est paramétrisé par les caractères du groupe Γ *introduit ci-dessus.*

D é m o n s t r a t i o n. Utilisons les relations bien connues entre les propriétés topologiques du groupe de Lie G, de son sous-groupe fermé K et de la variété homogène $X = G/K$. Si le groupe G est connexe et simplement connexe, alors on a les isomorphismes

$$H^2(X, \mathbf{R}) \approx H^1(K^0, \mathbf{R}), \tag{11}$$

$$\pi_1(X) \approx \pi_0(K) = K/K^0. \tag{12}$$

En termes des formes différentielles, l'isomorphisme (11) peut être décrit de la manière suivante: soient p la projection naturelle de G sur X et B la forme différentielle sur X appartenant à la classe $h \in H^2(X, \mathbf{R})$. Alors, la forme p^*B sur G s'écrira $p^*B = d\sigma$ (car pour un groupe de Lie simplement connexe $H^2(G, \mathbf{R}) = 0$). La 1-forme σ sur G est définie par cette condition à un terme additif de la forme df, $f \in C^\infty(G)$ près. On peut vérifier que la restriction σ_0 de la forme σ au sous-groupe K^0 est une forme fermée. La classe de cohomologies de cette restriction sera justement l'élément du groupe $H^1(K^0, \mathbf{R})$, qui correspond à la classe donnée h.

P r o b l è m e 8. Démontrer que, dans le cas où $K = G_F$, $X = \Omega$, $B = B_\Omega$, on peut choisir, pour σ_0, la 1-forme invariante à gauche de G_F correspondant à la forme linéaire $F \mid \mathfrak{g}_F$.
I n d i c a t i o n. Utiliser la formule (7) de **15.1**.

La première assertion du théorème découle maintenant du fait que l'isomorphisme (11) transforme les classes de cohomologie entières en classes de cohomologie entières. En effet, l'énoncé du problème 8 nous montre que si la représentation locale (10) admet un prolongement f au sous-groupe G_F^0, alors la forme σ_0 s'écrit

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi i} d \ln f. \tag{13}$$

Par conséquent, l'intégrale de la forme σ_0 sur chaque cycle de dimension 1 dans G_F^0 est égale à un nombre entier (à savoir, à l'accroissement divisé par 2π de l'argument de f lorsqu'on contourne ce cycle). Inversement, si la forme σ_0 appartient à une classe entière, la fonction f, définie sur G_F^0 par l'égalité (13) et la condition $f(e) = 1$, sera le prolongement de la représentation locale (10) au sous-groupe G_F^0.

Démontrons la deuxième assertion du théorème. Vu que la représentation d'un groupe de Lie connexe se définit d'une façon unique par la représentation locale correspondante, deux prolongements quelconques coïncident alors sur H^0. Tous les prolongements s'obtiennent donc d'un seul en le multipliant par un caractère du groupe H/H^0. L'espace des « fibres » Y introduit plus haut sera une variété homogène à groupe d'isométrie G et à sous-groupe stationnaire H. L'isomorphisme (11) pour le cas $K = H$, $X = Y$ nous donne l'égalité $\pi_1(Y) = \pi_0(H) = H/H^0$. Le théorème est ainsi démontré.

R e m a r q u e 1. Si l'ensemble $S = K(H)F$, introduit ci-dessus, est simplement connexe, alors le théorème 2 admet les précisions utiles suivantes.

1. Le fait qu'une orbite est entière n'est pas seulement nécessaire, mais aussi suffisant pour l'existence d'un prolongement de la représentation locale (10) à une autre représentation de dimension 1 de H.

2. Le groupe Γ qui figure dans la deuxième partie du théorème est isomorphe au groupe fondamental de l'orbite Ω.

R e m a r q u e 2. En géométrie différentielle il existe également une autre démonstration du théorème 2 fondée sur l'interprétation de la forme B_Ω comme forme de courbure d'une certaine connexion affine dans le fibré linéaire sur Ω. Pour cette démonstration voir le travail de B. Kostant [110] (voir également 15.4).

Il nous reste à étudier la dépendance de la représentation construite du choix du point F sur l'orbite Ω et du choix de la sous-algèbre admissible $\mathfrak{n}$ subordonnée à F.

P r o b l è m e 9. Démontrer que les représentations T_i, construites d'après les formes F_i, les sous-algèbres $\mathfrak{n}_i$, les sous-groupes H_i et les représentations de dimension 1 ρ_i et U_i, $i = 1, 2$, sont équivalentes si

$$F_1 = K(g)F_2, \quad \mathfrak{n}_1 = \mathrm{Ad}\, g\mathfrak{n}_2, \quad H_1 = gH_2g^{-1},$$
$$\rho_1(X) = \rho_2(\mathrm{Ad}\, gX), \quad U_1(h) = U_2(g^{-1}hg)$$

pour un certain $g \in G$.

I n d i c a t i o n. Considérer l'automorphisme interne du groupe G correspondant à l'élément g.

Ainsi, le choix du point F est ici sans importance.

De toute apparence la classe d'équivalence de la représentation obtenue ne dépend pas du choix de la sous-algèbre admissible.

Bien que cette affrimation ne soit pas démontrée dans le cas général, elle ne contredit non plus aucun des exemples actuellement connus. Dans le numéro suivant nous citerons certaines considérations « physiques » qui plaident en sa faveur.

On n'a pas démontré jusqu'à présent que la construction décrite amène toujours à une représentation irréductible (là aussi il n'y a pas encore de contre-exemple).

Pour des classes de groupes particulières on a des résultats plus précis.

Théorème 3 (B. Kostant-L. Auslender). *Soit G un groupe de Lie connexe simplement connexe résoluble. Alors:*

1) *Le groupe G appartient au type I si et seulement si l'espace $\mathcal{O}(G)$ est semi-séparé et toutes les formes B_Ω sont exactes.*

2) *Si G est de type I, alors toutes les représentations irréductibles de G s'obtiennent par la construction décrite ci-dessus à partir des orbites du groupe G dans $\mathfrak{g}^*$. A chaque orbite Ω correspond une famille de représentations irréductibles paramétrisée par les caractères du groupe $\pi_1(\Omega)$.*

3. *Les représentations correspondant à des orbites différentes ou à des caractères différents du groupe fondamental de l'orbite ne sont pas équivalentes deux à deux.*

Il est à remarquer que si le groupe G est exponentiel, toutes les G-orbites de $\mathfrak{g}^*$ sont homéomorphes à un espace euclidien. Par conséquent, du théorème 3 il découle en particulier que les groupes exponentiaux appartiennent au type I et qu'il existe, pour ces groupes, une bijection entre les ensembles $\hat{G}$ et $\mathcal{O}(G)$.

Si le groupe G est compact, connexe et simplement connexe, les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ sont alors simplement connexes. La condition d'entièreté définit dans $\mathcal{O}(G)$ un ensemble dénombrable d'orbites. On a le

Théorème 4. (A. Borel-A. Weyl-R. Bott). *Toutes les représentations irréductibles d'un groupe de Lie compact, connexe, simplement connexe G correspondent aux G-orbites entières de dimension maximale dans $\mathfrak{g}^*$* [1]).

Notons également que les représentations des séries principales et dégénérées des groupes non compacts semi-simples correspondent aux orbites entières de ces groupes dans leur K-représentation. On ne sait pas encore d'une manière définitive si elles sont irréductibles.

Le problème de liaison des topologies dans les ensembles $\hat{G}$ et $\mathcal{O}(G)$ est de l'intérêt particulier. Elle n'est résolue que partiellement, même dans le cas des groupes exponentiaux (on sait précisément que l'application de $\mathcal{O}(G)$ dans $\hat{G}$ est continue).

---

[1]) Nous énonçons ce théorème sous une forme utile par la suite. Pour plus de détails voir [105], [107].

15.4. Méthode des orbites et quantification des systèmes mécaniques hamiltoniens. L'objet fondamental étudié en mécanique classique hamiltonienne est l'espace des phases, i. e. une variété différenciable simplectique M. En général, elle se construit comme fibré cotangent sur l'espace des configurations N (voir 15.2), quoique pour le formalisme hamiltonien ce ne soit pas nécessaire.

Les grandeurs physiques sont des fonctions réelles sur M, l'état du système est un point de M. La variation du système dans le temps se décrit par un champ de vecteurs strictement hamiltonien, dont la fonction génératrice s'appelle énergie du système et se note H. Par conséquent, l'équation qui décrit la variation dans le temps de la grandeur F est de la forme

$$\dot{F} = \{H, F\}. \tag{1}$$

Le groupe G sera le groupe de symétrie du système donné, s'il agit sur M par transformations canoniques.

En mécanique quantique le rôle de l'espace des phases revient à l'espace projectif $P(V)$, où V est un certain espace hilbertien. Les grandeurs physiques sont des opérateurs autoadjoints dans V. La valeur de la grandeur A pour un état défini par un vecteur unité $\xi \in V$ est une variable aléatoire à fonction de distribution $p(t) = (E_t\xi, \xi)$, où E_t est une mesure spectrale projetante pour l'opérateur A. Par conséquent, dans un état défini par le vecteur ξ, une valeur concrète a ne sera attribuée qu'à celles des grandeurs A, pour lesquelles ξ est un vecteur propre à valeur propre a.

La variation du système dans le temps est donnée par un groupe d'opérateurs unitaires dans V qui s'écrivent sous la forme

$$U(t) = e^{\frac{ith}{2\pi}H},$$

où h est la constante de Planck et H un certain opérateur autoadjoint que l'on appelle opérateur d'énergie. La variation de la grandeur F dans le temps se décrit par l'équation

$$\dot{F} = \frac{ih}{2\pi}[H, F]. \tag{2}$$

Le groupe G sera le groupe de symétrie du système s'il agit sur V par représentations unitaires.

On appelle *quantification* le procédé permettant de construire un système quantique correspondant au système classique donné. Malheureusement, le terme « correspondant » n'a pas ici de signification précise. Puisque la mécanique classique est, dans un certain sens, l'idéalisation (obtenue par passage à la limite quand $h \to 0$), de la mécanique quantique, il n'existe de toute apparence pas de procédé de quantification unique. Néanmoins, dans les situations « suffisamment favorables » (par exemple, dans le cas des groupes),

on peut s'attendre à ce que le résultat définitif ne dépende pas du choix de la manière de quantifier.

La majorité des méthodes de quantification connues s'inscrivent bien dans le schéma suivant. Parmi les grandeurs physiques liées au système on choisit un certain ensemble de *grandeurs premières* qui forment une algèbre de Lie par rapport au produit de Poisson. On suppose que lors du passage à la mécanique quantique les relations de commutation entre les grandeurs premières restent invariables dans le sens suivant. Soit h la constante de Planck et $\hat{F}$ un opérateur de mécanique quantique correspondant à la grandeur classique première F. Alors, nous devons avoir la relation

$$\widehat{\{F_1, F_2\}} = \frac{ih}{2\pi} [\hat{F}_1, \hat{F}_2]. \qquad (3)$$

Cela signifie que l'application $F \mapsto \frac{2\pi}{ih} \hat{F}$ est une représentation opératoire de l'algèbre de Lie des grandeurs premières. Il est usuel d'inclure dans l'ensemble des grandeurs premières les constantes et de supposer vérifiée la relation

$$\hat{1} = 1 \text{ (opérateur identique).} \qquad (4)$$

Dans les systèmes du type d'un fibré cotangent, on prend pour les grandeurs premières l'ensemble des fonctions linéaires des coordonnées $p_1, \ldots, p_k$ et les fonctions quelconques de $q_1, \ldots, q_k$.

Les autres grandeurs s'écrivent sous forme de fonctions des grandeurs premières. Leurs analogues quantiques s'avèrent alors des fonctions des variables opératoires (non commutatives). Parfois on peut attribuer à ces expressions une certaine signification. Dans ce cas, on dit que la grandeur correspondante admet une quantification.

Pour construire une représentation de l'algèbre de Lie des grandeurs premières, il est naturel d'utiliser le fait que l'application $F \mapsto \xi_F$ (voir **15.3**) est une représentation de l'algèbre de Lie $C^\infty(M)$ de toutes les fonctions différenciables sur M (par rapport au produit de Poisson). Par conséquent, en posant $\hat{F} = \frac{ih}{2\pi} \xi_F$, nous obtiendrons les relations (3). Pour avoir aussi la relation (4), corrigeons un peu la définition de $\hat{F}$ en posant

$$\hat{F} = \frac{ih}{2\pi} \xi_F + F + \alpha(\xi_F), \qquad (5)$$

où α est une certaine 1-forme. Nous avons donc (4), mais la relation (3) peut maintenant ne pas avoir lieu.

Problème 1. Pour que les opérateurs $\hat{F}$, définis par la formule (5), satisfassent à la relation (3), il faut et il suffit que l'on ait:

$$d\alpha = \omega. \qquad (6)$$

I n d i c a t i o n. Utiliser l'égalité qui découle de la formule (4) dans 5.3

$$2d\alpha(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\alpha(\xi_2) - \xi_2\alpha(\xi_1) - \alpha([\xi_1, \xi_2]).$$

Remarquons que, dans le cas d'un fibré cotangent, on peut prendre pour α la forme $\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j$. La formule (5) s'écrira alors

$$\hat{F} = \frac{ih}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) + F - \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}. \qquad (5')$$

En particulier,

$$\hat{p}_j = \frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q_j}, \qquad \hat{q}_j = -\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_j} + q_j. \qquad (7)$$

Il se trouve que, dans le cas d'une forme ω non exacte, la généralisation de la construction décrite ci-dessus, amène naturellement à considérer un certain fibré E de dimension 1 sur M. Les opérateurs $\hat{F}$ agissent alors dans l'espace $\Gamma(E)$ des sections de ce fibré.

Pour construire E, choisissons un recouvrement de M par des ensembles U_j suffisamment petits et tels que ces ensembles et leurs intersections deux à deux sont connexes et simplement connexes.

Vu que ω est une forme fermée, dans chaque voisinage U_j elle prend la forme $d\alpha_j$, où α_j est une certaine 1-forme de U_j. Deux 1-formes α_j et α_k sont définies sur l'intersection $U_j \cap U_k$. Vu que $d\alpha_j = \omega = d\alpha_k$, la différence $\alpha_j - \alpha_k$ est fermée et, par conséquent, s'écrit

$$\alpha_j - \alpha_k = da_{jk},$$

où a_{jk} est une certaine fonction sur $U_j \cap U_k$.

Posons

$$g_{jk} = e^{2\pi i a_{jk}/h},$$

alors les opérateurs

$$\hat{F}_j = \frac{ih}{2\pi} \xi_F + F + \alpha_j(\xi_F)$$

possèdent sur l'intersection $U_j \cap U_k$ la propriété

$$g_{jk} \circ \hat{F}_k = \hat{F}_j \circ g_{jk}. \qquad (8)$$

Supposons que les fonctions g_{jk} satisfassent aux conditions

$$\left. \begin{array}{l} g_{jj} \equiv 1 \text{ dans } U_j, \; g_{jk}g_{kj} \equiv 1 \text{ dans } U_j \cap U_k \\ g_{jk}g_{kl}g_{lj} \equiv 1 \text{ dans } U_j \cap U_k \cap U_l. \end{array} \right\} \qquad (9)$$

Alors, on peut les prendre pour fonctions de transition pour construire un fibré de dimension 1 E sur M (voir 5.4). L'espace de ce

fibré s'obtient en collant les ensembles $\widetilde{U}_j = U_j \times \mathbf{C}$ par la relation d'équivalence

$$\widetilde{U}_j \ni (x_j, z_j) \sim (x_k, z_k) \in \widetilde{U}_k \Longleftrightarrow x_j = x_k,\ z_j = g_{jk}(x_k)\, z_k.$$

Rappelons que la section du fibré E se définit par une famille de fonctions φ_j sur U_j qui possèdent la propriété

$$\varphi_j(x) = g_{jk}(x)\, \varphi_k(x) \text{ pour } x \in U_j \cap U_k. \qquad (10)$$

L'ensemble des sections différenciables de E forme un espace vectoriel $\Gamma(E)$ et les opérateurs

$$\hat{F}_F\colon \{\varphi_j\} \to \{\widetilde{F}_j \varphi_j\} \qquad (11)$$

donnent, d'après (8), une représentation de l'algèbre de Lie $C^\infty(M)$ dans $\Gamma(E)$.

Essayons maintenant de voir sous quelles conditions la relation (9) est satisfaite et combien de différentes représentations on peut construire à partir de la forme donnée par le procédé ci-dessus.

Théorème 1. *Pour qu'à la forme ω corresponde au moins un fibré E, il faut et il suffit que l'intégrale de la forme ω soit un multiple entier du nombre h sur chaque cycle de dimension 2.*

(Cet énoncé est l'expression mathématique des conditions d'entièreté propres à la mécanique quantique.)

Démonstration. Considérons la fonction $c_{jkl} = a_{jk} + a_{kl} + a_{lj}$ définie dans $U_j \cap U_k \cap U_k$. D'après la définition des fonctions a_{jk}, on peut dire que $dc_{jkl} = 0$, c'est-à-dire que c_{jkl} est une constante. Vu que toutes les a_{jk} ne sont définies qu'à une constante additive près, les grandeurs c_{jkl} sont définies à une constante additive de la forme $c_{jk} + c_{kl} + c_{lj}$ près. Nous avons ainsi obtenu un cocycle appelé cocycle de Čech sur la variété M (par rapport au recouvrement $\{U_j\}$), défini à un cocycle cohomologique à zéro près. Nous avons donc un certain élément du groupe de cohomologie $H^2(M, \mathbf{C})$. En topologie algébrique on démontre que c'est justement l'élément qui correspond à la forme ω. Par conséquent, la condition du théorème équivaut à l'hypothèse que toutes les grandeurs c_{jkl} peuvent être choisies comme multiples de h. Mais ceci est à son tour équivalent aux relations (9). Le théorème est démontré.

Examinons maintenant le problème suivant, à savoir : à quel point la construction des représentations dans l'espace des sections $\Gamma(E)$ du fibré E est-elle arbitraire, si l'on connaît a priori qu'un tel fibré existe.

Problème 2. Démontrer qu'il existe une bijection entre les classes des représentations équivalentes et les éléments du groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbf{C}^*)$.

Indication. Notre construction dépendait du choix de la forme α_j et des fonctions a_{jk}. Au lieu de la forme α_j on peut prendre la forme $\alpha_j + \beta_j$,

où β_j est une forme fermée quelconque. Soient $\beta_j = db_j$ et $h_j = e^{2\pi i b_j/h}$. Quand on passe de α_j à $\alpha_j + \beta_j$, les fonctions de transition g_{jk} se transforment en $g_{jk}h_jh_k^{-1}$. Ceci équivaut à remplacer le fibré E par un fibré équivalent $\widetilde{E}$, et la représentation $\hat{F}_E$ par une représentation équivalente $\hat{F}_{\widetilde{E}} = h \circ \hat{F}_E \circ h^{-1}$. [Les isomorphismes de $\Gamma(E)$ et de $\Gamma(\widetilde{E})$ s'établissent par l'application $h: \{\varphi_j\} \to \{h_j\varphi_j\}$]. La liberté du choix des fonctions a_{jk} permet de remplacer les fonctions g_{jk} par les fonctions $g_{jk} \cdot z_{jk}$ où les z_{jk} sont des nombres complexes quelconques non nuls. Ces nombres satisfont à la condition $z_{jk}z_{kl}z_{lj}=1$ découlant de (9). En outre, les familles $\{z_{jk}\}$ et $\{z'_{jk}\}$ définissent les représentations équivalentes, si $z'_{jk} = z_{jk}w_jw_k^{-1}$.

Notons que le groupe $H^1(M, \mathbf{C}^*)$ est isomorphe au groupe de toutes les applications multiplicatives du groupe fondamental $\pi_1(M)$ dans le groupe $\mathbf{C}^*$ des nombres complexes non nuls.

En particulier, si M est simplement connexe, ce groupe est trivial.

Jusqu'ici, nous n'avons rien dit de l'espace dans lequel agissent les opérateurs $\hat{F}$. Cet espace doit être hilbertien, et les opérateurs $\hat{F}$, pour les grandeurs réelles F, doivent être auto-adjoints. En outre, nous nous intéressons aux systèmes élémentaires, pour lesquels la famille des opérateurs $\hat{F}$ est irréductible. L'espace $\Gamma(E)$ de toutes les sections du fibré E est trop large pour obtenir une représentation irréductible. Le calcul des dimensions montre que les représentations irréductibles doivent agir dans un espace de fonctions (ou de sections d'un fibré) sur une variété de dimension deux fois moindre que celle de M.

Dans le cas où $M = T^*N$ pour la quantification usuelle on utilise l'espace $V=L^2(N)$, où les fonctions sur M dépendant seulement de la projection sur N (c'est-à-dire les fonctions des coordonnées q_j) agissent par multiplication usuelle et les fonctions sur M, linéaires par rapport aux coordonnées p_j, agissent comme des champs de vecteurs (c'est-à-dire comme opérateurs différentiels d'ordre un).

On sait que localement chaque 2-forme fermée non dégénérée ω s'écrit dans des coordonnées appropriées $\omega = \sum_j dp_j \wedge dq_j$. Malheureusement, une telle « séparation des variables » en « p » et « q » peut ne pas exister globalement. Du point de vue géométrique, cette séparation des variables consiste à désigner ce que l'on appelle une *distribution lagrangienne*, c'est-à-dire à choisir pour chaque point $x \in M$ un sous-espace $L_x \subset T_xM$ de dimension deux fois moindre sur lequel la forme ω s'annule. Du point de vue analytique cela veut dire que l'on a choisi dans chaque voisinage $U \subset M$ une certaine sous-algèbre maximale commutative $P_0(U)$ dans l'algèbre de Lie $P(U)$ de toutes les fonctions différenciables sur U (par rapport au produit de Poisson). La liaison entre ces deux points de vue est assurée par le théorème de Frobenius qui affirme que chaque distribution lagrangienne satisfaisant à certaines conditions d'intégra-

bilité se met, dans des coordonnées locales appropriées, sous la forme $x \mapsto \left\{\frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_k}\right\}$. Cela signifie que les vecteurs de L_x sont tangents aux surfaces de valeur constante d'une fonction quelconque des coordonnées $q_1, \ldots, q_k$.

Ainsi, dans le cas général, on peut remplacer la séparation globale des variables en p_j et q_j par une certaine distribution lagrangienne intégrable L sur M. Si une telle distribution est donnée, nous pouvons considérer, dans chaque voisinage $U \subset M$, l'algèbre $P_0(U)$ des fonctions annulées par les vecteurs de L. Si le voisinage U est suffisamment petit, $P_0(U)$ sera la sous-algèbre commutative maximale de $P(U)$. Notons $\Gamma_0(E, U)$ l'espace des sections φ du fibré E sur U pour lesquelles

$$\hat{F}_E \varphi = F\varphi \quad \text{pour } F \subset P_0(U) \tag{12}$$

et $\Gamma_0(E)$ l'espace des sections du fibré E sur M, dont les restrictions à un voisinage quelconque U appartiennent à $\Gamma_0(E, U)$.

Pour le lecteur qui s'est déjà familiarisé avec la notion de connexion affine dans un fibré, remarquons que $\Gamma_0(E)$ peut être défini comme l'espace des sections annulées par différentiation covariante le long de chaque vecteur de L. En effet, l'opérateur $\hat{F} - F$ possède toutes les propriétés d'une dérivée covariante le long du camp ξ_F.

Supposons que pour toutes les grandeurs premières F, les opérateurs $\hat{F}_E$ appliquent l'espace $\Gamma_0(E)$ dans lui-même (cela équivaut à la condition $\{F, P_0(U)\} \subset P_0(U)$ pour un voisinage quelconque U) et, pour des F réels, sont auto-adjoints par rapport à un certain produit scalaire dans $\Gamma_0(E)$.

On peut alors prendre pour V le complété de $\Gamma_0(E)$ pour ce produit scalaire.

Une généralisation importante de la construction décrite s'obtient si l'on effectue un « passage dans le domaine complexe » et l'on donne une distribution lagrangienne L de manière que L_x soit un sous-espace de dimension deux fois moindre dans l'enveloppe complexe de l'espace T_xM. Il s'avère que chaque distribution lagrangienne complexe intégrable, qui satisfait à la condition supplémentaire d'après laquelle $L + \bar{L}$ est une distribution intégrable, prend la forme locale suivante. Il existe un système de coordonnées locales

$$q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1, \ldots, z_{k-r},$$

où p_j, q_j sont réelles, z_j sont complexes, telles que la forme ω s'écrit

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{k-r} dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

et L est engendré par les vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_r}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{k-r}}.$$

L'algèbre $P_0(U)$ se compose dans ce cas de fonctions des variables $q_1, \ldots, q_r, z_1, \ldots, z_{k-r}$ analytiques par rapport aux variables z_j. L'espace $\Gamma_0(E)$ peut être interprété comme l'espace des sections constantes le long d'une certaine direction réelle et analytiques le long de certaines directions complexes.

Une généralisation encore plus poussée de cette construction est également possible ; elle consiste à passer de $\Gamma_0(E)$ aux espaces des cohomologies de dimensions supérieures d'un faisceau des germes des sections de $\Gamma_0(E)$. Voir à ce sujet [107], [121], [128].

Rappelons maintenant que pour chaque forme ω sur M qui satisfait aux conditions d'entièreté du théorème 1, nous avons construit toute une famille de représentations $\bar{F}_E$, indexées par les éléments du groupe $H^1(M, \mathbf{C}^*)$. Si la famille $\{\varphi_j\}$ donne une section du fibré E, alors la famille $\{|\varphi_j|^2\}$ donnera la section d'un autre fibré E' sur M (à fonctions de transition $g'_{jk} = |g_{jk}|^2$). En général, le produit scalaire s'introduit dans $\Gamma_0(E)$ de manière à ce que le carré scalaire de la section $\{\varphi_j\}$ ne dépende que de la section $\{|\varphi_j|^2\}$ du fibré E'.

Par conséquent, si le produit scalaire cherché existe pour $\hat{F}_E$, il existe alors pour toutes les représentations qui s'obtiennent de $\hat{F}_E$ par l'action du sous-groupe $H^1(M, \mathbf{T})$. Il y a des raisons pour croire (c'est d'ailleurs démontré dans un grand nombre de cas particuliers) que pour les autres fibrés il n'existe pas de produit scalaire du type décrit. En supposant ce fait démontré, nous avons obtenu l'assertion suivante.

Théorème 2. *Un système classique (M, ω) admet une quantification du type décrit si et seulement si la forme ω a des intégrales égales à des multiples de h sur chaque cycle de dimension 2 sur M. Toutes ces quantifications sont indexées par les éléments du groupe $H^1(M, \mathbf{T})$.*

Remarquons que le groupe $H^1(M, \mathbf{T})$ coïncide avec le groupe des caractères (c'est-à-dire des applications multiplicatives dans le cercle $\mathbf{T}$) du groupe fondamental $\pi_1(M)$ de la variété M.

Soit G un groupe de Lie. La question se pose de savoir quelles représentations de ce groupe s'obtiennent par quantification à partir des systèmes classiques G-élémentaires, énumérés dans **15.2.** Nous ne considérons que les quantifications dont les grandeurs premières contiennent les fonctions génératrices des champs de vecteurs correspondant aux éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si cette

condition est satisfaite, nous pourrons construire la représentation de G en posant

$$T(\exp X) = e^{-2\pi i \hat{X}/h}$$

où exp est l'application canonique de l'algèbre de Lie dans le groupe correspondant (l'exponentielle). La relation (3) et la condition que les opérateurs $\hat{X}$ soient auto-adjoints assurent l'égalité

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2)$$

et le fait que les opérateurs $T(g)$ sont unitaires dans un certain voisinage de l'unité. Cette représentation « locale » se prolonge d'une façon unique à une représentation du groupe G si celui-ci est simplement connexe. Dans le cas contraire, on obtient une « représentation à valeurs multiples » qui sera univoque sur le revêtement universel $\widetilde{G}$ du groupe G.

D'après **15.2** on voit que tous les systèmes classiques qui nous intéressent sont des orbites entières Ω dans $\mathfrak{g}^*$.

Soit Ω une telle orbite et E un fibré sur Ω. Pour construire l'espace $\Gamma_0(E)$, invariant par rapport à G, nous devons choisir une distribution lagrangienne intégrable L G-invariante sur Ω.

Ces distributions admettent une interprétation fort simple.

P r o b l è m e 3. Supposons $\varphi \in \Omega$ et $\dim \Omega = 2k$. Il existe une bijection entre les distributions lagrangiennes réelles (respectivement complexes), intégrables, G-invariantes sur Ω et les sous-algèbres de codimension k dans $\mathfrak{g}$ (respectivement $\mathfrak{g}_c$), subordonnées à φ.

I n d i c a t i o n. La correspondance cherchée entre les distributions L et les sous-algèbres $\mathfrak{h}$ s'établit par la formule

$$L_\varphi = p(\mathfrak{h}),$$

où p est la projection naturelle de $\mathfrak{g}$ (respectivement $\mathfrak{g}_c$) sur $T_\varphi\Omega \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\varphi$ (respectivement sur l'enveloppe complexe de $T_\varphi\Omega$) définie par l'action de G sur Ω.

Le fait que L est lagrangienne équivaut au fait que $\mathfrak{h}$ est subordonné à la forme φ et l'intégrabilité de L au fait que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre.

Le lecteur a déjà remarqué l'analogie de l'opération de quantification avec la construction décrite dans le numéro précédent d'une représentation à partir d'une orbite.

L'interprétation mécanique ci-dessus permet de donner une « signification physique » à la construction d'une représentation à partir de l'orbite, décrite dans **15.3.** En outre, elle permet d'utiliser dans la théorie des représentations d'autres méthodes de la mécanique quantique. Il serait particulièrement intéressant, par exemple, d'obtenir à l'aide de l'appareil des intégrales de Feinman une démonstration directe de la formule universelle (Φ) pour les caractères des représentations irréductibles (voir plus loin **15.6**). Pour les exemples les plus simples une telle démonstration a déjà été obtenue.

15.5. Propriétés fonctorielles de la correspondance entre les orbites et les représentations. Supposons, comme toujours, que G soit un groupe de Lie connexe, simplement connexe, et H son sous-groupe fermé. Les deux problèmes suivants jouent un rôle important dans la théorie des représentations.

a. Soit T une représentation unitaire irréductible du groupe G. Trouver la décomposition de sa restriction au sous-groupe H en composantes irréductibles.

b. Soit U une représentation unitaire irréductible U du sous-groupe H. Trouver la décomposition de la représentation induite $T = \mathrm{Ind}\,(G, H, U)$ en composantes irréductibles.

Ces deux problèmes sont dans un certain sens duaux l'un à l'autre. (Pour les groupes finis et compacts cette dualité s'exprime par le théorème de Frobenius ; voir 13.5). Il est également à noter que les problèmes de décomposition en composantes irréductibles du produit tensoriel de deux représentations irréductibles du groupe G et des représentations qui se réalisent dans les sections des G-vibrations sur les espaces homogènes (en particulier, les représentations dans les fonctions, dans les champs de vecteurs, dans les formes différentielles, etc.) sont des cas particuliers du premier et du second problème respectivement.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre qui correspond au sous-groupe H. Chaque forme $F \in \mathfrak{g}^*$ peut être restreinte à $\mathfrak{h}$. Nous obtenons ainsi la projection canonique $p\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$.

Il est naturel de s'attendre à ce que, dans les cas où il y a une correspondance assez « bonne » entre les ensembles $\hat{G}$ et $\mathcal{O}\,(G)$, les opérations considérées (restriction au sous-groupe et induction à partir d'un sous-groupe) sont liées à la projection $p\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$. Mais ces rapports ne sont encore suffisamment étudiés que pour les groupes nilpotents. Dans ce cas, nous avons le

Théorème 1. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe, et H son sous-groupe fermé connexe. Alors la construction décrite dans* 15.3 *établit une bijection entre les ensembles* $\hat{G}$ et $\mathcal{O}\,(G)$, $\hat{H}$ et $\mathcal{O}\,(H)$.

Si la représentation irréductible unitaire T du groupe G correspond à l'orbite $\Omega \in \mathcal{O}\,(G)$, alors sa restriction à H se décompose en une intégrale directe des représentations irréductibles unitaires du sous-groupe H, qui correspondent aux orbites $\omega \in \mathcal{O}\,(H)$ appartenant à $p\,(\Omega)$.

Si la représentation unitaire irréductible U du sous-groupe H correspond à l'orbite $\omega \in \mathcal{O}(H)$, alors la représentation induite $T\,(G, H, U)$ se décompose en une intégrale directe des représentations irréductibles G, qui correspondent à celles des orbites $\Omega \in \mathcal{O}\,(G)$ dont l'intersection avec $p^{-1}\,(\omega)$ n'est pas vide.

Problème 1. Si le sous-groupe H est un sous-groupe invariant de G, la dernière condition équivaut alors à l'inclusion $\Omega \subset p^{-1}\,(\omega)$.

Indication. L'ensemble $p^{-1}\,(\omega)$ est dans ce cas G-invariant.

Supposons que la représentation U soit de dimension 1. Alors l'orbite correspondante ω se compose d'un seul point $f \in \mathfrak{h}^*$. D'après le théorème 1 appliqué à ce cas particulier, nous avons le

Corollaire. *Pour qu'une représentation monomiale $T(G, H, U)$ soit irréductible, il faut et il suffit que l'ensemble $p^{-1}(f)$ soit entièrement contenu dans une seule G-orbite Ω.*

Ainsi, pour la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ et une forme quelconque $F \in p^{-1}(f)$ on a la condition (5) de **15.3**.

Traçons le schéma de la démonstration du théorème 1. (Le lecteur peut trouver les détails dans [102]). Avant tout, il suffit de démontrer le théorème dans le cas où le groupe H est de codimension 1 dans G. Le cas général se réduit à celui-ci si l'on considère une suite de sous-groupes

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

dont les dimensions augmentent successivement de l'unité.

Ensuite, si $\dim G - \dim H = 1$, alors H est un sous-groupe invariant de G et le groupe G sera le produit semi-direct de H et d'un certain sous-groupe S, isomorphe à **R**. Nous noterons X_0 l'élément de base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ du groupe S et F_0 la forme dans $\mathfrak{h}^\perp$ égale à 1 sur X_0.

Problème 2. Soit Ω l'orbite du groupe G dans $\mathfrak{g}^*$ et p la projection de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{h}^*$. Alors les deux cas suivants peuvent se présenter.

1) L'ensemble $\omega = p(\Omega)$ est une H-orbite dans $\mathfrak{h}^*$; l'image réciproque $p^{-1}(\omega)$ est la réunion d'une famille des G-orbites $\Omega_t = \Omega + tF_0$, $t \in \mathbf{R}$.

2) L'ensemble $p(\Omega)$ sera la réunion d'une famille ω_t, $t \in \mathbf{R}$ des H-orbites dans $\mathfrak{h}^*$; les images réciproques $p^{-1}(\omega_t)$ sont entièrement contenues dans Ω ; le groupe S agit dans $\mathfrak{h}^*$ de sorte que $K(\exp \tau X_0)\,\omega_t = \omega_{t+\tau}$.

Indication. Démontrer que l'intersection de l'orbite Ω avec toutes les droites de la forme $F + \mathfrak{h}^\perp$ est formée d'un seul point ou contient entièrement cette droite ; ceci découle du fait que l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$ s'écrit en coordonnées canoniques à l'aide de fonctions polynomiales.

Supposons maintenant que le théorème 1 soit démontré pour tous les groupes de dimension $< n$. Supposons que $\dim G = n$ et, par conséquent, $\dim H = n - 1$.

Problème 3. Soit T une représentation irréductible du groupe G. Deux cas sont alors possibles.

1. La restriction U de la représentation T à H est une représentation irréductible de H. La représentation $\mathrm{Ind}(G, H, U)$ se décompose en une intégrale directe des représentations irréductibles T_t, $t \in \mathbf{R}$ dont chacune coïncide avec U sur H.

2. La restriction de T à H se décompose en une intégrale directe des représentations irréductibles U_t, $t \in \mathbf{R}$, du sous-groupe H. Chacune des représenta-

tions Ind (G, H, U_t) est équivalente à T. Le groupe S agit sur U_t suivant la formule

$$U_t (\exp X_0 h \exp (-\tau X_0)) = U_{t+\tau} (h).$$

I n d i c a t i o n. Utiliser l'hypothèse de récurrence et les résultats de **13.3**.

Utilisant enfin la forme explicite de la correspondance entre les orbites et les représentations (à l'aide de la construction de **15.3**), on peut établir que les deux cas qui figurent dans les conditions du problème 2 correspondent exactement aux deux cas du problème 3. La démonstration est donc terminée.

Un problème très intéressant consiste à étudier les propriétés fondamentales de la correspondance entre les orbites et les représentations pour d'autres classes de groupes. Il est naturel de le poser avant tout pour les groupes tels que la correspondance entre $\hat{G}$ et $\mathcal{O}(G)$ soit connue (voir théorèmes 3 et 4 dans **15.3**). Comme le montrent des exemples très simples, le théorème 1 ne peut textuellement pas être appliqué à d'autres groupes. Il semble probable que le caractère de la correspondance entre les opérations de restriction et d'induction, d'une part, et celles de projection, ou de passage à l'image réciproque d'une orbite, d'autre part, soit intimement lié aux propriétés topologiques de l'orbite Ω et de sa décomposition en images réciproques des points par la projection p.

15.6. Formule universelle des caractères et mesures de Plancherel. Un des problèmes fondamentaux de la théorie des représentations des groupes est celui de la recherche des formules explicites pour les caractères généralisés des représentations irréductibles (voir **11.2**).

Il existe aujourd'hui tout un nombre de résultats, dont la forme est loin d'être identique pour les types de groupes différents, qui donnent la solution de ce problème pour des groupes et des représentations concrets, ou même pour des classes entières. La méthode des orbites suggère une idée pour obtenir d'emblée la solution de ce problème pour tous les groupes de Lie; elle consiste à considérer une fonction généralisée I_Ω sur le groupe de Lie G, définie d'après la G-orbite Ω dans $\mathfrak{g}^*$ de la manière suivante.

Soient V un ensemble ouvert de G recouvert par un système de coordonnées canoniques et U son image réciproque dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Pour U on peut prendre l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que les valeurs propres purement imaginaires de l'opérateur ad X (si toutefois elles existent) ne dépassent pas π en valeur absolue.

En particulier, pour les groupes exponentiaux il n'existe pas de valeurs propres purement imaginaires non nulles; nous pouvons donc poser $U = \mathfrak{g}$, $V = G$.

L'application exp: $U \to G$ est un difféomorphisme et permet

de transposer les fonctions principales et les fonctions généralisées de U à V et inversement. On sait que pour les groupes résolubles, compacts et complexes semi-simples, l'ensemble V a un complément dans G de mesure nulle.

Définissons la fonction généralisée I_Ω sur V en posant

$$\langle I_\Omega, \varphi\rangle = \int_\Omega \left(\int_U \varphi(\exp X)\, e^{2\pi i \langle F, X\rangle}\, dX \right) d\beta_\Omega(F), \tag{1}$$

où dX est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathfrak{g}^*$, et β_Ω la mesure sur l'orbite Ω donnée par la $2k$-forme

$$\frac{1}{k!} B_\Omega \wedge \ldots \wedge B_\Omega \quad (k \text{ facteurs}). \tag{2}$$

Il se trouve que la fonction I_Ω est intimement liée au caractère généralisé χ_Ω d'une certaine représentation unitaire T du groupe G. Dans de nombreux cas, la liaison entre I_Ω et χ_Ω peut être décrite ainsi: *il existe une fonction $p_\Omega \in C^\infty(V)$ invariante par rapport aux automorphismes internes, égale à* 1 *sur l'unité du groupe, non nulle sur V et satisfaisant à l'égalité*

$$\chi_\Omega = p_\Omega^{-1} I_\Omega. \tag{Φ}$$

Nous appellerons cette formule *formule universelle des caractères* ou, brièvement, formule (Φ).

Plus exactement, nous dirons que la *formule* (Φ) *est vérifiée pour la représentation T à caractère χ_Ω si l'on a les deux conditions*:

1) *pour chaque fonction $\varphi \in C_0^\infty(G)$ du domaine des définitions du caractère χ_Ω l'intégrale suivante converge*

$$\int_\Omega \left(\int_U \varphi(\exp X)\, p_\Omega^{-1}(\exp X)\, e^{2\pi i \langle F, X\rangle}\, dX \right) d\beta_\Omega(F) \tag{3}$$

et sa valeur est égale à $\langle \chi_\Omega, \varphi\rangle = \operatorname{tr} T(\varphi)$;

2) *si pour $\varphi \in C_0^\infty(G)$ l'intégrale* (3) *converge et l'opérateur $T(\varphi)$ est positif, alors φ est contenu dans le domaine de définition de χ_Ω.*

Si ces conditions sont satisfaites, nous dirons que la représentation T *correspond à l'orbite* Ω et nous la désignerons T_Ω. La correspondance entre les orbites et les représentations ainsi introduite coïncide de toute apparence avec la correspondance décrite dans **15.3**. Une démonstration complète de cette hypothèse n'est pas encore obtenue.

Remarquons que la formule (Φ) met en lumière la nature de la fonction généralisée χ_Ω qui s'avère intimement liée à la géométrie de l'orbite Ω. Ainsi, si Ω est compacte, χ_Ω est alors une fonction usuelle différenciable (ce cas correspond à une représentation de dimension finie). Si Ω est un cylindre, c'est-à-dire contient avec

chaque point S la variété linéaire $F + L$, où L est un sous-espace dans $\mathfrak{g}^*$, alors χ_Ω contient les facteurs du type de δ-fonction. En particulier, si $L = \mathfrak{h}^\perp$ pour une certaine sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, alors χ_Ω est concentré sur $\exp \mathfrak{h}$. Si l'orbite Ω est une sous-variété fermée de $\mathfrak{g}^*$, alors l'intégrale (3) converge pour chaque fonction $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Dans le cas contraire, la convergence de cette intégrale s'avère une condition nécessaire supplémentaire pour que la fonction φ appartienne au domaine de définition de χ_Ω.

Cette condition peut souvent être formulée comme suit : la transformation de Fourier de la fonction $X \mapsto p_\Omega(\exp X)^{-1} \varphi(\exp X)$ s'annule sur l'ensemble $\partial\Omega$, le bord de Ω (qui coïncide avec le bord de l'adhérence de Ω), cf. [105]).

La formule (Φ) est également utile pour l'étude de la topologie de l'ensemble $\hat{G}$ et pour sa comparaison avec la topologie de $\mathcal{O}(G)$.

La formule (Φ) est aujourd'hui vérifiée pour une classe suffisamment large de représentations. En particulier, cette formule est démontrée pour toutes les représentations des groupes compacts simplement connexes, exponentiaux, de matrices réelles d'ordre deux, des représentations de la série principale des groupes semi-simples non-compacts (voir [73], [74], [105], [106], [127]).

Il s'est avéré que dans le cas des représentations correspondant aux orbites de dimension maximale, on peut prendre pour la fonction p_Ω une seule fonction universelle

$$q(\exp X) = \det \mathfrak{S} \operatorname{ad} X, \tag{4}$$

où nous avons noté $\mathfrak{S}$ la fonction

$$\mathscr{S}t = \frac{\operatorname{sh}(t/2)}{t/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k}}{(2k+1)!}. \tag{5}$$

Un problème très intéressant consiste à déduire la formule (Φ) à partir des considérations « physiques » mentionnées dans **15.4.** On peut espérer que la méthode de quantification à l'aide d'intégrales continuales, proposée par Feinman, permettra de donner une démonstration unique des résultats énumérés ci-dessus, et suggérera aussi les modifications à apporter dans la formule (Φ) dans les cas où elle est fausse (par exemple, pour les représentations des séries dégénérées des groupes semi-simples non compacts).

Passons maintenant au calcul de la mesure de Plancherel des groupes de Lie. Rappelons (voir **12.4**) que la formule de Plancherel pour les groupes unimodulaires G est de la forme

$$\int_G |\varphi(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}[T(\varphi) T(\varphi)^*] d\mu([T]), \tag{6}$$

où $[T]$ désigne la classe d'équivalence de la représentation T.

Soit $A(G)$ le sous-espace de $C(G)$ engendré par les fonctions de la forme $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$, où

$$\varphi_i \in L^1(G, dg) \cap L^2(G, dg).$$

P r o b l è m e 1. Démontrer que pour chaque fonction $\varphi \in A(G)$ on a la formule d'inversion

$$\varphi(g) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}[T_\lambda(\varphi) T_\lambda(g)^*] \, d\mu(\lambda). \tag{7}$$

I n d i c a t i o n. Il suffit de vérifier cette égalité pour $g = e$. Dans ce cas, elle s'écrit

$$\varphi(e) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr} T_\lambda(\varphi) \, d\mu(\lambda) \tag{8}$$

et pour les fonctions de la forme $\varphi = \varphi_1 * \varphi_1^*$ se déduit de (6).

L'égalité (8) peut être considérée comme une décomposition des δ-fonctions sur le groupe G en caractères des représentations irréductibles.

Dans le cas où la formule (Φ) est vérifiée, cette égalité possède une signification simple et concrète ; elle exprime la décomposition de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}^*$ en mesures canoniques sur les orbites.

En effet, supposons qu'on ait une bijection entre les orbites et les représentations et que, pour les représentations qui correspondent aux orbites de dimension maximale, on puisse choisir pour p_Ω la fonction universelle (4). (Toutes ces conditions sont vérifiées, par exemple, pour les groupes exponentiaux.)

Si le groupe G est unimodulaire, la mesure de Lebesgue dF sur $\mathfrak{g}^*$ est invariante par rapport à la K-représentation.

Supposons que l'espace $\mathcal{O}(G)$ des orbites soit semi-séparé. Alors la mesure dF se met d'une façon unique sous la forme

$$dF = \int_{\mathcal{O}(G)} \beta_\Omega \, d\mu(\Omega).$$

En passant à la transformation de Fourier, nous obtenons l'égalité

$$\delta(X) = \int_{\mathcal{O}(G)} I_\Omega(\exp X) \, d\mu(\Omega). \tag{9}$$

Vu que les orbites de dimension maximale remplissent un ensemble de mesure complète dans $\mathfrak{g}^*$, il suffit d'effectuer l'intégration dans (9) sur l'ensemble $\mathcal{O}_{\max}(G)$ des orbites de dimension maximale. Enfin,

en utilisant la formule (Φ) et l'égalité $q(e) = 1$, nous obtenons la relation

$$\delta(g) = \int\limits_{\mathcal{O}_{\max}(G)} \chi_\Omega(g)\, d\mu(\Omega) \tag{10}$$

qui nous donne évidemment la décomposition cherchée (8).

Dans le cas où l'espace topologique $\mathcal{O}(G)$ est semi-séparé, le sous-ensemble $\mathcal{O}_{\max}(G)$ est une variété différenciable. Une carte locale sur $\mathcal{O}_{\max}(G)$ peut être définie de la manière suivante.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ un système de coordonnées locales (pas nécessairement linéaires) sur $\mathfrak{g}^*$.

Supposons que l'équation

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{2n} = 0 \tag{11}$$

définisse une sous-variété S dans $\mathfrak{g}^*$ transversale aux orbites de dimension maximale. Alors, dans un voisinage suffisamment petit, S a un seul point commun avec chaque orbite qui passe par ce voisinage. Nous pouvons, par conséquent, identifier un certain ouvert de $\mathcal{O}_{\max}(G)$ avec le voisinage sur S. Comme coordonnées locales dans le voisinage nous pouvons choisir les restrictions à S des fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Une autre méthode pour introduire des coordonnées locales dans $\mathcal{O}_{\max}(G)$ consiste à considérer les fonctions G-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$. Les deux méthodes sont intimement liées. En fait, l'introduction des coordonnées par la première méthode est un des moyens les plus commodes pour construire explicitement des fonctions G-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$.

E x e m p l e. Soient $G = GL(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}^* = \mathrm{Mat}_n\,\mathbf{C}$. Comme nous l'avons vu dans **15.1**, les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ sont des classes des matrices semblables. Pour la variété S on peut prendre l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_{n-1} & p_n \end{pmatrix},$$

et pour coordonnées sur S les paramètres $p_1, \ldots, p_n$.

P r o b l è m e 2. Démontrer que chaque orbite de $\mathcal{O}_{\max}(G)$ coupe S exactement en un seul point. Les paramètres $p_1, \ldots, p_n$ coïncident (au signe près) avec les coefficients du polynôme caractéristique de chaque matrice de l'orbite correspondante.

I n d i c a t i o n. Vérifier que la matrice A appartient à une orbite de dimension maximale si et seulement s'il existe un vecteur ξ tel que $\xi, A\xi, \ldots, A^{n-1}\xi$ sont linéairement indépendants.

Il nous faudra aussi la notion de forme de Pfaff d'une matrice antisymétrique A. Soient V un espace de dimension $2n$ et $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_{2n}$ sa base; $\widetilde{A} = \sum\limits_{k,j} a_{kj}\, \xi_k \wedge \xi_j$ un élément homogène de degré deux dans l'algèbre extérieure sur V. Alors, la n-ième puissance extérieure de $\widetilde{A}$ s'écrit

$$\widetilde{A} \wedge \widetilde{A} \wedge \ldots \wedge \widetilde{A} = c \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_{2n}, \tag{12}$$

car l'espace $\wedge^{2n} V$ est de dimension 1. Le coefficient c dans l'égalité (12) est un polynôme de degré n des coefficients a_{kj}. On l'appelle *pfaffian* de la matrice A et on le note Pf A.

P r o b l è m e 3. Démontrer l'identité

$$(\mathrm{Pf} A)^2 = \det A.$$

I n d i c a t i o n. Utiliser le fait que chaque élément $\widetilde{A} \in \wedge^2 V$ s'écrit dans une base appropriée

$$\widetilde{A} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k \wedge \xi_{n+k}.$$

Revenons au calcul de la mesure de Plancherel. Il se trouve que dans les hypothèses faites ci-dessus et pour le choix indiqué des coordonnées $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sur $\mathcal{O}_{\max}(G)$ nous avons le résultat suivant.

Soit $F(\lambda)$ un point de l'orbite aux paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ dans la variété S. Les valeurs des produits de Poisson des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ au point $F(\lambda)$ forment une matrice antisymétrique Φ:

$$\Phi_{ij} = \{\varphi_i, \varphi_j\}(F(\lambda)). \tag{13}$$

P r o b l è m e 4. La mesure de Plancherel pour le groupe G est donnée par la formule

$$\mu = \rho(\lambda, 0)\, \mathrm{Pf}\, \Phi(\lambda)\, d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_k, \tag{14}$$

où $\rho(\lambda, \varphi)$ est la mesure de Lebesgue dF sur $\mathfrak{g}^*$ dans les coordonnées λ, φ:

$$dF = \rho(\lambda, \varphi)\, d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_k \wedge d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_{2n}. \tag{15}$$

I n d i c a t i o n. Comparer les valeurs des formes différentielles qui définissent les mesures dF, β_Ω et μ au point $F(\lambda)$.

La formule (14) se simplifie considérablement lorsque les coordonnées $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ sont linéaires, c'est-à-dire sont des vecteurs de $\mathfrak{g}$. Dans ce cas $\rho(\lambda, \varphi) = \mathrm{const}$ et

$$\Phi_{ij}(\lambda) = \langle F(\lambda), [\varphi_i, \varphi_j]\rangle = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m c_{ij}^m,$$

où c_{ij}^m sont des constantes structurales de l'algèbre de Lie. La mesure μ cherchée s'écrira alors

$$\mu = P(\lambda)\, d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_k, \tag{16}$$

où P est un polynôme homogène de degré n des variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ dont les coefficients s'expriment explicitement en termes des constantes structurales de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

Il est intéressant de noter que l'application formelle de l'égalité (16) aux groupes semi-simples complexes et compacts nous donne, si l'on remplace l'intégration par la sommation sur tous les paramètres λ qui satisfont aux conditions d'entièreté, une expression, correcte pour la mesure de Plancherel.

Le fait suivant est non moins intéressant ; pour les groupes semi-simples réels ce procédé ne donne la réponse correcte que pour la série discrète des représentations.

15.7. Caractères infinitésimaux et orbites. La méthode des orbites permet dans certains cas de calculer explicitement le caractère infinitésimal d'une représentation irréductible.

Rappelons (voir **11.3**) que le caractère infinitésimal de la représentation T est un homomorphisme λ_T du centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ dans le corps des nombres complexes lié à la représentation T par la formule

$$T(X) = \lambda_T(X) \cdot 1. \tag{1}$$

Utilisons également le théorème 2 de **10.4** sur l'existence d'un isomorphisme des espaces vectoriels $Z(\mathfrak{g})$ et $I(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g})$ (l'espace des éléments G-invariants de $S(\mathfrak{g})$).

On peut faire correspondre à chaque orbite Ω du groupe G dans $\mathfrak{g}^*$ la forme linéaire λ_Ω sur $Z(\mathfrak{g})$ de la manière suivante. On peut identifier l'algèbre $S(\mathfrak{g})$ à l'algèbre $P(\mathfrak{g}^*)$ des fonctions polynômes sur $\mathfrak{g}^*$. A savoir, nous ferons correspondre à chaque $X \in \mathfrak{g}$ la fonction linéaire sur $\mathfrak{g}^*$:

$$F \mapsto 2\pi i \langle F, X \rangle$$

et nous prolongerons cette application par linéarité et multiplicativité à un isomorphisme de $S(\mathfrak{g})$ sur $P(\mathfrak{g}^*)$. Le sous-espace $I(\mathfrak{g})$ sera alors réalisé par des polynômes constants sur les orbites. Définissons λ_Ω comme la forme qui fait correspondre au polynôme invariant sa valeur sur l'orbite Ω.

Remarquons qu'a priori ces formes ne sont pas multiplicatives car nous ne savons pas si l'isomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ et de $I(\mathfrak{g})$ est toujours un isomorphisme d'algèbres [1]).

---

[1]) La démonstration de ce fait a été récemment obtenue par M. Duflo [75].

Nous dirons que la représentation T correspond à l'orbite Ω si

$$\lambda_T = \lambda_\Omega \tag{2}$$

(et, par conséquent, λ_Ω est une forme multiplicative).

La correspondance entre les orbites et les représentations obtenue de cette manière est moins précise que celle introduite plus haut. En effet, nous nous intéressons maintenant non pas à l'orbite elle-même, mais à l'ensemble des niveaux communs des polynômes G-invariants renfermant cette orbite.

Pour les groupes de Lie algébriques (c'est-à-dire pour les sous-groupes de $GL(n, \mathbf{R})$ ou de $GL(n, \mathbf{C})$ définis par des équations algébriques) on peut démontrer que les orbites de dimension maximale sont « presque discernées » par des fonctions rationnelles G-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ (c'est-à-dire que les ensembles des niveaux correspondants se composent d'un nombre fini d'orbites).

Pour les groupes complexes semi-simples et nilpotents on a l'assertion plus forte: presque tous les ensembles de niveaux simultanés des polynômes G-invariants sont des G-orbites.

Par conséquent, l'orbite n'est en général pas déterminée par les valeurs correspondantes des polynômes G-invariants. Ce qui est une illustration géométrique du fait que les représentations irréductibles ne sont pas en général déterminées par leurs caractères infinitésimaux.

La vérification de la formule (2) est intimement liée à celle de la formule (Φ) de **15.6**. A savoir, si pour toutes les orbites de dimension maximale la formule (Φ) ayant la fonction universelle q pour p_Ω est vérifiée, alors l'isomorphisme entre $Z(\mathfrak{g})$ et l'ensemble des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}^*$ est un isomorphisme d'algèbres et admet une interprétation analytique très simple. Considérons la transformation qui fait correspondre à une fonction différenciable finie φ sur G la fonction $\widetilde{\varphi}$ sur $\mathfrak{g}^*$ par la formule

$$\widetilde{\varphi}(F) = \int_{\mathfrak{g}} q^{-1}(\exp X)\, \varphi(\exp X)\, e^{2\pi i \langle F, X \rangle}\, dX. \tag{3}$$

Il s'avère que *cette transformation envoie les opérateurs de Laplace sur G sont envoyés dans les opérateurs de multiplication par les polynômes G-invariants sur $\mathfrak{g}^*$.*

Si la représentation T correspond dans le sens de **15.6** à l'orbite Ω, alors son caractère infinitésimal coïncide avec λ_Ω.

Inversement, si les opérateurs de Laplace sur un groupe G possèdent la propriété ci-dessus, alors tous les λ_Ω sont des formes multiplicatives et les deux membres de la formule (Φ) satisfont à un même système d'équations différentielles.

Ainsi, de chacune des formules (2) et (Φ) on peut bien déduire l'autre.

Pour les groupes compacts, la formule (2) est connue depuis longtemps et a permis de déduire la formule (Φ) (voir [105]).

Pour les groupes exponentiaux, au contraire, la formule (2) a été obtenue dans [73] comme corollaire de la formule (Φ).

Citons quelques problèmes non résolus qui se posent naturellement lors de l'étude des caractères infinitésimaux par la méthode des orbites.

1. Généraliser la notion de caractère infinitésimal et l'égalité (2) au centre du corps de Lie $D(\mathfrak{g})$ lié à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (voir **10.4**).

2. Donner une démonstration purement algébrique de la propriété ci-dessus des opérateurs de Laplace sur un groupe de Lie.

TROISIÈME PARTIE

QUELQUES EXEMPLES

---

§ 16. GROUPES FINIS

16.1. Analyse harmonique sur le cube de dimension trois. Un des collaborateurs de l'Institut mathématique numérota un jour par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les faces d'un modèle de cube. Un autre, arrivé à l'Institut le lendemain, remplaça chaque nombre par la moyenne arithmétique des quatre nombres voisins. Le premier collaborateur, ayant remarqué ce changement le jour suivant, lui rendit la pareille. Quels nombres seront écrits sur les faces du cube dans un mois, si l'on sait que les deux collaborateurs vont à l'Institut un jour sur deux?

La solution de ce problème amusant servira de modèle d'application de la théorie des représentations à divers problèmes des mathématiques, de mécanique et de physique ayant une symétrie quelconque.

La première étape de la solution consiste à énoncer le problème dans les termes de la théorie des représentations. Soient G le groupe des isométries du cube, V_F l'espace des fonctions sur l'ensemble des faces du cube. L'espace V_F est muni l'une représentation naturelle T du groupe G induite par la représentation unité du sous-groupe H_F qui laisse invariante une des faces (cf. avec le **13.1**).

Considérons dans l'espace V_F l'opérateur L qui envoie la fonction $f(x)$ dans la fonction

$$(Lf)(x)=\frac{1}{4}\sum f(y),$$

où la sommation s'effectue sur les quatre faces y voisines de la face x.

L'opérateur L est permutable à l'action de G. (Réfléchir à cette affirmation et se convaincre de sa validité.) Par conséquent, on peut appliquer à L les théorèmes généraux sur les opérateurs d'entrela-

cement. Décomposons la représentation T en composantes irréductibles. Le nombre d'entrelacement $c(T, T)$ est égal au nombre de classes des couples de faces du cube (voir **13.5**). Il n'y en a que trois: faces coïncidantes, voisines et opposées. On peut donc en déduire que T est la somme de trois représentations T_1, T_2, T_3 non équivalentes deux à deux.

Mais les trois sous-espaces invariants de V_F sont faciles à décrire: l'espace V_1 des constantes, V_2 des fonctions paires à somme de valeurs nulle et V_3 des fonctions impaires. (Paire et impaire signifie que la fonction prend des valeurs égales ou de signe contraire sur les faces opposées.) L'opérateur L est un multiple de la constante λ_i sur chacun des V_i, $i=1, 2, 3$. Evidemment $\lambda_1 = 1$. Pour une fonction de V_2 on peut prendre la fonction égale à 1 sur un couple de faces opposées, à -1 sur un autre et nulle sur le troisième. On a donc $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Pour une fonction de V_3 prenons enfin la fonction égale à 1 sur une face, -1 sur la face opposée et nulle sur les autres. Alors $\lambda_3 = 0$.

L'opérateur L^{30} qui nous intéresse se réduit à la multiplication par 1, $(-1/2)^{30}$, 0 dans V_1, V_2 et V_3 respectivement. Par conséquent, on peut affirmer avec une précision suffisamment élevée que tous les nombres cherchés valent 3,5, car le vecteur $\xi_1 = (3,5,\ 3,5,\ 3,5,\ 3,5,\ 3,5, 3,5)$ est la projection du vecteur $\xi = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sur un sous-espace des constantes. Vu que la projection de ξ sur V_2 a une longueur inférieure ou égale à

$$\|\xi - \xi_1\| = \sqrt{17,5}$$

l'erreur possible ne dépasse pas

$$\frac{\sqrt{17,5}}{2^{30}} \approx 0,004.$$

Le lecteur peut répéter les mêmes raisonnements pour un octaèdre ou un dodécaèdre. Les valeurs propres de l'opérateur L sont alors 1, -1, 0 et 1, $-1/5$, $1/\sqrt{5}$, $-1/\sqrt{5}$ respectivement.

En considérant d'autres espaces homogènes pour le groupe des isométries du cube, on peut construire un système complet de représentations de ce groupe. Soient

X_F, l'ensemble des faces du cube,
X_S, l'ensemble des sommets du cube,
X_D, l'ensemble des grandes diagonales du cube,
X_T, l'ensemble des tétraèdres réguliers inscrits dans le cube,
X_C, l'ensemble des centres du cube.

Les espaces de fonctions sur ces ensembles seront notés V_F, V_S, V_D, V_T, V_C. Leurs dimensions valent 6, 8, 4, 2, 1 respectivement. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la table des nombres

d'entrelacement pour les représentations correspondantes T_F, T_S, T_D, T_T, T_C est de la forme :

	T_F	T_S	T_D	T_T	T_C
T_F	3	2	1	1	1
T_S	2	4	2	2	1
T_D	1	2	2	1	1
T_T	1	2	1	2	1
T_C	1	1	1	1	1

Que peut-on dire en examinant cette table? Avant tout, la forme même des nombres se trouvant sur la diagonale montre que T_C est irréductible (ce qui découle, par ailleurs, du fait qu'elle est de dimension 1), T_D et T_T sont des sommes de deux composantes irréductibles, T_F la somme de trois composantes irréductibles, tandis que pour T_S il y a deux hypothèses : soit la somme de quatre représentations non équivalentes deux à deux, soit la somme de deux représentations équivalentes. Mais la deuxième possibilité est à rejeter, car le nombre d'entrelacement $c(T_S, T_C)$ ne peut être égal à 1.

En outre, de cette même table on voit que la multiplicité de T_C dans toutes les autres représentations est 1. Nous avons déjà vu que T_F est la somme des représentations $T_1 \approx T_C$, T_2 et T_3.

Soient $T_D = T_1 + T_4$, $T_T = T_1 + T_5$; vu que

$$c(T_D, T_F) = c(T_D, T_T) = c(T_F, T_T) = 1$$

les représentations T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 sont non équivalentes deux à deux. On voit également d'après la table ci-dessus que T_S contient T_1, T_4, T_5 et l'une des représentations T_2 et T_3. Puisque $\dim T_1 = 1$, $\dim T_2 = 2$, $\dim T_3 = 3$, $\dim T_4 = 3$, $\dim T_5 = 1$, on a

$$T_S = T_1 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Vu que le groupe G contient cinq classes d'éléments conjugués (élément unité, rotation autour d'un sommet, rotation autour du milieu d'une arête et deux types de rotations autour du centre d'une face : de 90° et 180°), les cinq représentations trouvées sont alors toutes les représentations possibles de G. Ce fait découle aussi de l'éga-

lité $|G| = \sum (\dim T_i)^2$, qui dans notre cas s'écrit $24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$. Indiquons maintenant les sous-espaces de fonctions dans lesquels agissent les représentations irréductibles.

T_1 agit, évidemment, dans l'espace des constantes.

T_2, par définition, agit dans l'espace des fonctions paires à somme de valeurs nulle sur X_F.

T_3, par définition, agit dans l'espace des fonctions impaires sur X_F et également dans un certain sous-espace $V' \subset V_S$.

T_4, par définition, agit dans l'espace des fonctions à somme de valeurs nulle sur X_D et également dans un certain sous-espace $V'' \subset V_S$.

T_5, par définition, agit dans l'espace des fonctions à somme nulle sur T_T et également dans un certain sous-espace $V''' \subset V_S$.

Décrivons les sous-espaces V', V'' et V'''.

L'espace V''' est de dimension 1 et consiste en des fonctions à valeurs de signe contraire sur deux sommets voisins quelconques. L'espace V'' est de dimension 3 et consiste en des fonctions paires à somme de valeurs nulle sur X_S. Enfin, V' est de dimension 3 et consiste des fonctions impaires sur X_S orthogonales à V'''.

Toutes ces assertions sont faciles à déduire de l'analyse de la forme explicite des opérateurs d'entrelacement.

16.2. Représentations du groupe symétrique. On appelle *groupe symétrique* de degré n, ou groupe S_n, le groupe de tous les automorphismes d'un ensemble fini X contenant n éléments. Il est clair que l'ordre du groupe S_n est égal au nombre de toutes les permutations de n symboles, c'est-à-dire $n!$.

Problème 1. Démontrer que le groupe S_n est résoluble pour $n \leqslant 4$.

Indication. Les groupes S_1 et S_2 sont commutatifs, S_3 est le produit semi-direct de S_2 et $\mathbf{Z}_3$ et S_4 est le produit semi-direct de S_3 et $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

On sait que pour $n \geqslant 5$, le groupe S_n n'est plus résoluble et contient un sous-groupe invariant simple A_n d'index 2. Ce sous-groupe invariant s'appelle *groupe alterné* de degré n et se définit comme le noyau de l'homomorphisme s du groupe S_n dans un groupe de deux éléments.

Problème 2. Démontrer que la fonction

$$s(\sigma) = \prod_{i<j} \operatorname{sgn}(\sigma(i) - \sigma(j)), \quad \sigma \in S_n$$

est un homomorphisme de S_n dans le groupe multiplicatif $\{+1, -1\}$.

Indication. Considérer le polynôme de n variables

$$P(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

et vérifier que $P(\sigma(x)) = s(\sigma) P(x)$.

On appelle généralement les éléments de A_n permutations *paires* et les éléments de $S_n \setminus A_n$ permutations *impaires*.

La classification des représentations irréductibles du groupe S_n peut être obtenue par le même procédé qu'on a employé ci-dessus pour l'étude du groupe des isométries du cube. Pour cela il faut construire une famille suffisamment large d'espaces homogènes sur lesquels agit le groupe S_n.

Soit α une famille d'entiers naturels $n_1, \ldots, n_k$ qui possède les propriétés

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k, \tag{1}$$

$$n_1 + \ldots + n_k = n. \tag{2}$$

Pour chaque famille α désignons par X_α l'espace dont chaque point est la décomposition de l'ensemble X en sous-ensembles $X_1, \ldots, X_k$, tels que $| X_i | = n_i$. Il est évident que le groupe S_n agit transitivement sur X_α.

Problème 3. Démontrer que $| X_\alpha | = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$.

Indication. Démontrer que le sous-groupe stationnaire du point $x \in X_\alpha$ dans S_n est isomorphe à $S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_k}$.

Nous avons pour chaque espace X_α deux représentations du groupe S_n : la représentation T_α induite par la représentation triviale de dimension 1 du sous-groupe $S_\alpha = S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_k}$ et la représentation T'_α induite par la représentation s non triviale de dimension 1 (voir problème 2) de ce même sous-groupe.

La classification de toutes les représentations irréductibles de S_n peut être obtenue en considérant la table des nombres d'entrelacement $c(T_\alpha, T'_\beta)$. Introduisons un ordre lexicographique dans l'ensemble des familles α, en posant que $\alpha = (n_1, \ldots, n_k)$ est plus grand que $\beta = (m_1, \ldots, m_l)$ si $n_1 > m_1$, ou si $n_1 = m_1$, mais $n_2 > m_2$, ou enfin si $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, mais $n_3 > m_3$, etc.

En outre, définissons pour chaque famille $\alpha = (n_1, \ldots, n_k)$ la famille *conjuguée* $\alpha^* = (n_1^*, \ldots, n_l^*)$, où n_i^* est la cardinalité de l'ensemble des nombres $n_1, \ldots, n_k$ non inférieurs à i.

Problème 4. Démontrer que la famille α^*, de même que α, satisfait aux conditions (1) et (2) et que $(\alpha^*)^* = \alpha$.

Indication. A chaque famille $\alpha = (n_1, \ldots, n_k)$ correspond une fonction à échelons non croissante égale à n_i dans l'intervalle de i à $i + 1$. Montrer qu'à la famille α^* correspondra alors la fonction inverse. (Voir également ci-dessous l'interprétation des familles α à l'aide de tables de Young.)

Théorème 1 (J. von Neumann-H. Weyl).

$$c(T_\alpha, T'_\beta) = \begin{cases} 0 & si\ \alpha > \beta^*, \\ 1 & si\ \alpha = \beta^*. \end{cases}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit C l'opérateur d'entrelacement pour le couple T_α, T'_β. Comme nous avons vu dans **13.5**, cet opérateur est donné sur $X_\alpha \times X_\beta$ par la fonction $c(x, y)$, telle que

$$c(\sigma(x), \sigma(y)) = s(\sigma)\, c(x, y). \tag{3}$$

Nous avons montré que pour $\alpha > \beta^*$ de telles fonctions n'existent pas (sauf la fonction triviale $c \equiv 0$) et que pour $\alpha = \beta^*$ il n'en existe qu'une seule (à une constante multiplicative près).

Soient $x \in X_\alpha$ et $y \in X_\beta$. Rappelons que x est la décomposition de X en sous-ensembles $X_1, \ldots, X_k$, $|X_i| = n_i$ et y la décomposition de X en sous-ensembles $Y_1, \ldots, Y_l$, $|Y_i| = m_i$.

P r o b l è m e 5. Démontrer que si $\alpha > \beta^*$, on a $|X_i \cap Y_j| \geqslant 2$ pour certains i et j.

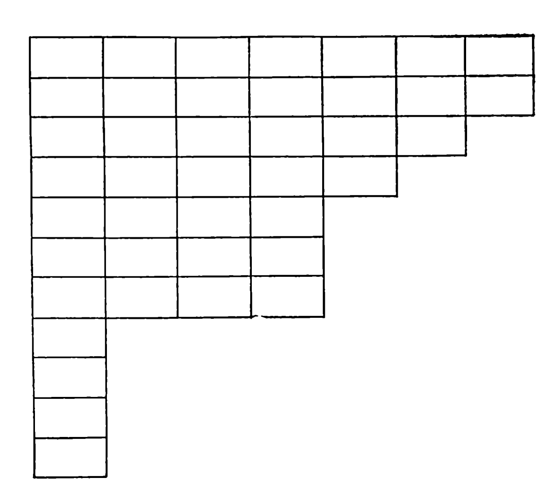
I n d i c a t i o n. Raisonner par l'absurde.

Ainsi, si $\alpha > \beta^*$, il existe deux éléments de l'ensemble X contenus dans un même sous-ensemble aussi bien pour la décomposition α que pour β. Soit σ l'élément du groupe S_n, qui permute ces deux éléments de X sans modifier les places de tous les autres. Alors, $\sigma(x) = x$, $\sigma(y) = y$. Par conséquent,

$$c(x, y) = c(\sigma(x), \sigma(y)) = s(\sigma)\, c(x, y) = -c(x, y).$$

Donc, $c(x, y) = 0$ et la première assertion est démontrée.

Supposons maintenant $\alpha = \beta^*$. Considérons ce que l'on appelle la *table de Young*:



composée de k lignes de longueurs $n_1, \ldots, n_k$ respectivement.

Problème 6. Démontrer que les longueurs des colonnes de la table de Young forment la famille $\beta = (n_1^*, \ldots, n_l^*)$ conjuguée avec α.

Supposons maintenant que nous avons écrit, au hasard, les éléments de l'ensemble donné X (que nous considérons comme l'ensemble des entiers de 1 à n) dans les cases de la table de Young.

La figure obtenue s'appelle *diagramme de Young*. On peut faire correspondre à chaque diagramme de Young le couple (x, y), $x \in X_\alpha$, $y \in X_\beta$. Le point x est la distribution des éléments de X dans les lignes de la table de Young, et le point y la distribution en colonnes. Il est évident que le couple $(\sigma(x), \sigma(y))$ correspond au diagramme de Young qui s'obtient du diagramme initial à l'aide de la permutation σ. En particulier, on peut en déduire que tous les couples $(\sigma(x), \sigma(y))$ sont différents pour des σ distincts.

Fixons un diagramme de Young quelconque et supposons que (x_0, y_0) soit le couple correspondant. Posons

$$c_0(x, y) = \begin{cases} s(\sigma) & \text{si } x = \sigma(x_0); \quad y = \sigma(y_0), \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{4}$$

Il est clair que cette fonction satisfait à la condition (3) et définit, par conséquent, un opérateur d'entrelacement.

De même que pour le cas $\alpha > \beta^*$, on peut vérifier que l'équation (3) ne possède aucune autre solution (sauf c_0 et les solutions qui lui sont proportionnelles). Le théorème est démontré.

Du théorème 1 il s'ensuit que les représentations T_α et T'_{α^*} possèdent exactement une seule composante irréductible commune U_α et que toutes les représentations U_α sont non équivalentes deux à deux. Pour achever la classification il faut se convaincre que le nombre de représentations irréductibles ainsi trouvées coïncide avec le nombre de classes d'éléments conjugués dans S_n.

Faisons correspondre à chaque famille $\alpha = (n_1, \ldots, n_k)$ la classe d'éléments conjugués suivante. Soient $X_1, \ldots, X_k$ les décompositions de X_α et $\sigma \in S_n$ la permutation cyclique de chacun des ensembles X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Problème 7. Démontrer que la classe de l'élément σ ne dépend que de la famille α et que chaque classe d'éléments conjugués peut être obtenue de cette manière.

Indication. Pour chaque $\sigma \in S_n$ considérer la décomposition de X en orbites du sous-groupe engendré par σ.

Une étude plus détaillée de l'opérateur d'entrelacement $C \in \mathscr{C}(T_\alpha, T'_{\alpha^*})$ permet d'obtenir une formule explicite pour le caractère de la représentation U_α. Cette expression est suffisamment compliquée et ne peut probablement être simplifiée (vu que chaque fonction « générale » de deux familles d'arguments entiers ne se simplifie pas).

Nous nous bornons à donner ici l'expression pour la dimension de la représentation U_α qui correspond à la famille $\alpha = (n_1, \ldots, n_k)$:

$$\dim U_\alpha = \frac{n! \prod\limits_{i<j} (l_i - l_j)}{l_1! \ldots l_k!},$$

où $l_i = n_i + k - i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

16.3. Représentations du groupe $SL(2, \mathbf{F}_q)$. La famille des groupes $SL(2, \mathbf{F}_q)$, où $\mathbf{F}_q$ est un corps fini (voir **3.2**), est une des plus étudiées. Nous montrerons ici comment construire la série principale des représentations de ces groupes.

Le groupe $G = SL(2, \mathbf{F}_q)$ agit sur le plan de dimension 2 sur le corps $\mathbf{F}_q$. Si l'on élimine de ce plan l'origine des coordonnées, le groupe G agira transitivement sur l'ensemble restant X. Le sous-groupe stationnaire du point $(0, 1) \in X$ est alors le sous-groupe triangulaire N composé de matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbf{F}_q. \tag{1}$$

On a donc en particulier

$$|G| = |N| \cdot |X| = q(q^2-1). \tag{2}$$

Notre but est d'étudier la représentation T du groupe G de l'espace V des fonctions sur X:

$$\left[T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f\right](u, v) = f(au + cv, bu + dv) \tag{3}$$

(autrement dit, T est induite par les représentations triviales de N).

Trouvons l'espace $\mathscr{C}(T)$ des opérateurs d'entrelacement pour la représentation T.

Comme nous savons (voir **13.5**), il faut pour cela énumérer les orbites du groupe G dans l'espace $X \times X$.

Problème 1. Démontrer que chaque G-orbite dans $X \times X$ est de la forme

$$O_\lambda: \{(x, y) \in X \times X : x = \lambda y \quad \lambda \in F_q^*\}$$

ou

$$\widetilde{O}_s: \left\{(x, y) \in X \times X : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = s, \quad s \in F_q^*\right\}.$$

Indication. Chaque vecteur $x \in X$ peut par l'action de G être envoyé dans le vecteur $(0, 1)$. Le vecteur y est soit proportionnel à x (avec coefficient $\lambda \neq 0$), soit engendre avec x un parallélogramme de surface $s \neq 0$.

Corollaire. $c(T, T) = 2(q-1)$.

Notons C_λ et $\widetilde{C}_s$ les opérateurs d'entrelacement correspondant aux orbites ci-dessus. La structure de l'anneau $\mathscr{C}(T)$ est définie par les relations suivantes.

P r o b l è m e 2. Vérifier les égalités

$$C_{\lambda_1}C_{\lambda_2}=C_{\lambda_1\lambda_2}, \tag{4}$$

$$C_\lambda\widetilde{C}_s=\widetilde{C}_{s\lambda^{-1}}, \quad \widetilde{C}_sC_\lambda=\widetilde{C}_{\lambda s}, \tag{5}$$

$$\widetilde{C}_{s_1}\widetilde{C}_{s_2}=\sum_{s\neq 0}\widetilde{C}_s+qC_{-s_1^{-1}s_2}. \tag{6}$$

I n d i c a t i o n. Les opérateurs C_λ agissent dans l'espace V suivant la formule

$$C_\lambda f(x) = f(\lambda x), \tag{7}$$

et les opérateurs $\widetilde{C}_s$ suivant la formule

$$[\widetilde{C}_s f](x)=\sum_{\Delta(x,\, y)=s} f(y), \tag{8}$$

où $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$. Utiliser le fait que le système d'équations par rapport à z

$$\begin{cases} \Delta(x, z)=s_1, \\ \Delta(z, y)=s_2 \end{cases}$$

possède une seule solution si $\Delta(x, y) \neq 0$ et q solutions si $\Delta(x, y) = 0$.

Il est évident que les opérateurs C_λ, $\lambda \in \mathbf{F}_q^*$ forment un sous-anneau commutatif dans $\mathscr{C}(T)$ isomorphe à l'anneau de groupe du groupe multiplicatif du corps. Considérons la décomposition de l'espace V correspondante (voir 8.3)

$$V=\sum_{\chi\in\mathbf{F}_q^*} V_\chi. \tag{9}$$

L'espace V_χ se compose de fonctions sur X qui satisfont à la condition

$$f(\lambda x) = \chi(\lambda) f(x). \tag{10}$$

P r o b l è m e 3. Démontrer que les opérateurs $\widetilde{C}_s$ envoient l'espace V_χ dans $V_{\chi^{-1}}$.

I n d i c a t i o n. Utiliser les formules (5), (7) et (8).

Les représentations T_χ du groupe G qui apparaissent dans les sous-espaces V_χ sont appelées représentations de la série principale. Il n'est pas difficile de vérifier que la représentation T_χ coïncide avec Ind (G, H, U_χ), où H est le sous-groupe des matrices triangulaires de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a\in F_q^*, \quad b\in F_q,$$

et U_χ est une représentation de dimension 1 de H donnée par la formule

$$U_\chi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \chi(a).$$

Théorème 1. *La représentation T_χ est irréductible si $\chi \neq \neq \chi^{-1}$ et se décompose en somme de deux composantes irréductibles non équivalentes si $\chi = \chi^{-1}$.*

Démonstration. Les deux assertions découlent du problème 3. En effet, l'opérateur d'entrelacement générique de $\mathscr{C}(T)$ s'écrit :

$$C = \sum_{\lambda \in F_q^*} f(\lambda) C_\lambda + \sum_{s \in F_q^*} g(s) \widetilde{C}_s.$$

Par conséquent, si $\chi \neq \chi^{-1}$, tous les opérateurs de $\mathscr{C}(T_\chi)$ sont scalaires. Mais si $\chi = \chi^{-1}$, $\mathscr{C}(T_\chi)$ est alors engendré par les opérateurs $C_1 = 1$ et $\widetilde{C}_1$. Par conséquent, dans ce cas, $c(T_\chi) = 2$.

Etudions en plus de détails le cas exceptionnel $\chi = \chi^{-1}$. Si q est impair, il existe deux caractères exceptionnels:

$$\chi_0(x) \equiv 1 \text{ et } \chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y^2, \\ -1, & \text{si } x \text{ n'est pas un carré.} \end{cases}$$

L'espace V_{χ_0} contient un sous-espace invariant de dimension 1 et son sous-espace complémentaire des fonctions à somme de valeurs nulle.

L'espace V_{χ_ε} est la somme de deux sous-espaces irréductibles de même dimension $(q+1)/2$.

Ce résultat peut être obtenu sans difficulté à partir des égalités (6) et (10).

Si $q = 2^m$, il n'y a qu'un seul caractère exceptionnel $\chi_0 \equiv 1$. La représentation correspondante T_{χ_0} est analogue à celle obtenue pour q impair.

Il est intéressant de remarquer que dans les deux cas (q pair et impair), la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles trouvées est égale à $q(q+1)(q+3)/2$.

Dans le cas impair, ce nombre s'obtient comme la somme

$$\frac{q-3}{2}(q+1)^2 + 1 + q^2 + 2\left(\frac{q+1}{2}\right)^2,$$

et dans le cas pair comme la somme

$$\frac{q+2}{2}(q+1)^2 + 1 + q^2.$$

Ce nombre est approximativement égal à la moitié de l'ordre du groupe. Par conséquent, le groupe G possède encore une série de représentations irréductibles ne faisant pas partie de la décomposi-

tion de T. On appelle parfois ces représentations *analytiques*, car, comme dans le cas du groupe $SL(2, \mathbf{R})$, elles se réalisent dans l'espace des fonctions analytiques. Une réalisation analogue est aussi possible dans le cas d'un corps fini. Pour plus de détails voir le livre [20] (pour le cas du corps des nombres p-adiques). Une autre réalisation de cette série peut être obtenue par inclusion du groupe G dans le groupe simplectique $Sp(2, \mathbf{F}_{q^2})$ et en considérant ensuite la représentation spinorielle de ce dernier (cf. avec 18.2). D'après le choix des deux variantes possibles d'inclusion de G dans $Sp(2, \mathbf{F}_{q^2})$ on peut obtenir soit la série principale, soit la série analytique des représentations de G. Pour une généralisation intéressante de la notion de représentation analytique pour le cas $G = SL(n, \mathbf{F}_q)$ voir [85].

16.4. Champs de vecteurs sur les sphères. Parmi les dernières réalisations les plus marquantes en topologie des variétés il faut citer la solution du problème classique concernant les champs de vecteurs sur la sphère. L'énoncé du problème est le suivant:

Soit S^{n-1} une sphère unité dans l'espace euclidien réel $\mathbf{R}^n$ de dimension n.

(A) *Quel est le nombre maximal* $\rho(n)$ *des champs de vecteurs tangents différenciables sur la sphère* S^{n-1}, *linéairement indépendants à chaque point*?

P r o b l è m e 1. Démontrer que $\rho(n)$ coïncide avec le nombre maximal des fonctions vectorielles ξ sur S^{n-1} à valeur dans $\mathbf{R}^n$, qui possèdent les propriétés:

$$(\xi_i(x), x) = 0, \quad (\xi_i(x), \xi_j(x)) = \delta_{ij}. \tag{1}$$

I n d i c a t i o n. Utiliser le procédé d'orthogonalisation.

Il est particulièrement commode de mettre la solution du problème (A) sous forme de trois propriétés de la fonction $\rho(n)$:

a) $\rho(n)$ ne dépend que de la puissance du nombre 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers;

b) $\rho(16n) = \rho(n) + 8$;

c) $\rho(2^k) = 2^k - 1$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Utilisant ces propriétés il est aisé de calculer $\rho(n)$ pour un n quelconque. Par exemple, $\rho(800) = \rho(32) = \rho(2) + 8 = 9$.

Nous montrerons ici comment on peut résoudre un problème plus facile à l'aide de la théorie des représentations.

(B) *Quel est le nombre maximal* $\mu(n)$ *des champs de vecteurs linéaires sur* S^{n-1}, *linéairement indépendants à chaque point*? (Nous appelons linéaire tout champ de vecteurs de la forme $\xi(x) = Ax$, $A \in \in \mathrm{End}\,\mathbf{R}^n$.)

P r o b l è m e 2. Démontrer que $\mu(n)$ coïncide avec le nombre maximal d'opérateurs A dans $\mathbf{R}^n$ qui possèdent les propriétés:

$$A_i'A_i = 1, \quad A_iA_j + A_jA_i = -2\delta_{ij}. \tag{2}$$

I n d i c a t i o n. Démontrer que $(Ax, x) = 0$ pour tous les $x \in S^{n-1}$ si et seulement si $A + A' = 0$.

Il est clair que $\mu(n) \leqslant \rho(n)$. Nous verrons plus loin, après avoir calculé $\mu(n)$, que l'on a même $\mu(n) = \rho(n)$. Il serait très intéressant d'obtenir une démonstration directe de cette égalité.

Un des moyens possibles pour le faire consisterait à démontrer que chaque famille de fonctions vectorielles qui satisfont à la condition (1) peut être déformée en une famille de fonctions vectorielles linéaires à même propriété.

Enonçons le problème (5) en termes de la théorie des représentations. Soit G_k le groupe à générateurs $a_1, \ldots, a_k$, ε et aux relations:

$$a_i^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1, \quad a_ia_j = a_ja_i\varepsilon \text{ pour } i \neq j. \tag{3}$$

P r o b l è m e 3. Démontrer que l'inégalité $k \leqslant \mu(n)$ est équivalente à l'existence d'une représentation T réelle de dimension n du groupe G_k qui envoie l'élément ε dans -1.

I n d i c a t i o n. Considérer la représentation T du groupe G_k définie par ses valeurs sur les générateurs:

$$T(a_i) = A_i, \quad T(\varepsilon) = -1.$$

Passons à l'étude du groupe G_k et de ses représentations.

P r o b l è m e 4. Démontrer les propriétés suivantes du groupe G_k:

a) G_k est l'extension centrale de $(\mathbf{Z}_2)^k$ à l'aide de $\mathbf{Z}_2$;

b) le centre $C(G_k)$ est d'ordre 2 pour k pair et 4 pour k impair;

c) le commutant $[G_k, G_k]$ est d'ordre 2 pour $k > 1$;

d) l'ensemble des éléments conjugués à l'élément g — G_k consiste soit en un seul élément g (si $g \in C(G_k)$), soit en un couple g, εg (si $g \notin C(G_k)$).

I n d i c a t i o n. Utiliser le fait que chaque élément $g \in G_k$ se met de façon unique sous la forme

$$g = a_{i_1} \ldots a_{i_s} \quad \text{ou} \quad g = \varepsilon a_{i_1} \ldots a_{i_s}. \tag{4}$$

Les résultats du problème 4 permettent d'énumérer toutes les représentations irréductibles de G_k. Leur nombre est égal à celui de classes d'éléments conjugués, soit $|C(G_k)| + \frac{|G_k| - |C(G_k)|}{2}$. Cette expression est égale à $2^k + 1$ pour k pair et à $2^k + 2$ pour k impair. Remarquons que le groupe G_k possède exactement 2^k représentations de dimension 1 pour lesquelles ε est envoyé dans 1. En outre, d'après le théorème de Burnside, la somme des carrés des dimensions de toutes les représentations doit être égale à $|G_k| = 2^{k+1}$. On peut en déduire que pour k pair il n'y a qu'une seule représentation irré-

ductible qui envoie ε dans -1 ; sa dimension est égale à $2^{k/2}$. Pour k impair il y a deux représentations semblables de dimension $2^{(k-1)/2}$ chacune.

Précisons le type de ces représentations. Pour cela, d'après le critère de Shur (voir **11.1**, théorème 3), il faut calculer le signe de la valeur $\sum_{g\in G_k} \chi(g^2)$, où χ est le caractère de la représentation étudiée.

Problème 5. Démontrer que $g^2 = 1$ ou $g^2 = \varepsilon$, quel que soit $g \in G_k$. Plus exactement, si g est de la forme (4), alors $g^2 = \varepsilon^{s(s+1)/2}$.

Ainsi, la valeur qui nous intéresse est égale à

$$2\chi(e)(1 - C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 + C_k^4 - \ldots). \qquad (5)$$

P r o b l è m e 6. Démontrer que le signe de la valeur (5) est donné par la table

k mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
signe	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

I n d i c a t i o n. L'expression entre parenthèses dans (5) peut être mise sous la forme $\operatorname{Re}(1+i)^k - \operatorname{Im}(1+i)^k = \operatorname{Re}(1-i)^{k+1}$.

Notons T_k la représentation réelle du groupe G_k qui envoie ε dans -1 et possède la dimension minimale admissible.

P r o b l è m e 7. Démontrer que la dimension de T_k est égale à
$2^{k/2}$, si $k = 8m$ ou $8m+6$,
$2^{(k+1)/2}$, si $k = 8m+1$, $8m+3$ ou $8m+5$,
$2^{(k+2)/2}$, si $k = 8m+2$ ou $8m+4$,
$2^{(k-1)/2}$, si $k = 8m+7$.
I n d i c a t i o n. Utiliser le résultat du problème (6) et le critère de Shur.

Pour calculer $\mu(n)$, il suffit de remarquer que l'égalité $\mu(n) = k$ équivaut à la condition $\dim T_k = n$. D'après cette considération et le résultat du problème 7, on déduit aisément que la fonction $\mu(n)$ possède effectivement les propriétés a), b), c) et, par conséquent, coïncide avec $\rho(n)$.

Ce même résultat peut être obtenu en considérant au lieu du groupe G_k l'algèbre sur **R** engendrée par les opérateurs A_i qui satisfont à la condition (2). Nous laissons au lecteur le soin de réaliser cette méthode, en utilisant les résultats de **3.5** sur les algèbres de Clifford sur **R**.

§ 17. GROUPES COMPACTS

17.1. Analyse harmonique sur la sphère. Les aires des ombres d'un certain corps placé dans un faisceau des rayons parallèles de direction quelconque sont identiques. Peut-on alors affirmer que ce corps est une boule?

Il se trouve que si l'on admet de plus que le corps est convexe et possède un centre de symétrie, la réponse à cette question est positive. Plus exactement, nous avons

Théorème 1. *Un corps convexe à centre de symétrie dans* $\mathbf{R}^n$ *est défini de façon unique par les aires de ses projections sur tous les hyperplans.*

Pour démontrer ce théorème il faut recourir à l'analyse harmonique sur la sphère. Avant d'exposer cette démonstration, donnons une autre formulation de ce théorème.

Théorème 2. *Un corps convexe à centre de symétrie dans* $\mathbf{R}^n$ *est défini de façon unique par les aires de toutes ses sections par des hyperplans.*

L'équivalence des théorèmes 1 et 2 découle des considérations suivantes. Soit K un corps convexe à centre de symétrie dans $\mathbf{R}^n$. Nous pouvons alors définir une norme dans $\mathbf{R}^n$, pour laquelle le corps K sera une boule unité. Inversement, si $\mathbf{R}^n$ est muni d'une norme, la boule unité sera un corps convexe à centre de symétrie.

Appelons deux corps K et K' duaux si les espaces de Banach correspondants V_K et $V_{K'}$ sont adjoints l'un à l'autre par rapport au produit scalaire naturel dans $\mathbf{R}^n$. Autrement dit, K est dual à K', si les deux conditions suivantes sont équivalentes:

$$\sup_{y \in K'} (x, y) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x \in K. \tag{1}$$

Dans ce cas, les conditions ci-dessous sont également équivalentes:

$$\sup_{x \in K} (x, y) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad y \in K'. \tag{2}$$

Soit $\mathbf{R}^{n-1}$ un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ et p la projection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^{n-1}$.

Problème 1. Démontrer que si les corps K et K' sont duaux dans $\mathbf{R}^n$ entre eux, alors $\mathbf{R}^{n-1} \cap K$ et $p(K')$ le sont aussi dans $\mathbf{R}^{n-1}$.

Indication. Utiliser les conditions (1) ou (2).

Ainsi, *le problème de la détermination d'un corps par ses projections est équivalent au problème de la détermination du corps dual par ses sections.*

Passons à la démonstration du théorème. Pour concrétiser, limitons-nous au cas $n = 3$, laissant au lecteur le soin d'effectuer les raisonnements analogues pour le cas général.

Formulons avant tout ce problème en termes qui permettent le passage à la théorie des représentations. Nous définirons le corps

convexe à centre de symétrie $K \subset \mathbf{R}^3$ à l'aide d'une fonction f sur la sphère unité $S \subset \mathbf{R}^3$ de la manière suivante. Si x est un point de S et l_x une demi-droite issue de l'origine des coordonnées et passant par ce point, alors posons

$$f(x) = \frac{1}{2} r_x^2, \tag{3}$$

où r_x est la longueur du segment $l_x \cap K$.

Étant donné que le corps K a un centre de symétrie, la fonction obtenue f sur S est paire (c'est-à-dire qu'elle prend des valeurs égales en deux points opposés de la sphère).

L'aire des sections du corps K par tous les plans de dimension 2 s'exprime aisément à l'aide de la fonction f.

Problème 2. Si C est un grand cercle de la sphère S découpée dans S par le plan P, alors

$$\text{aire}\,(K \cap P) = \int_C f(x)\,dx. \tag{4}$$

Indication. Utiliser la formule pour l'aire en coordonnées polaires.

Ainsi, notre théorème peut être formulé de la manière suivante.

Une fonction paire sur la sphère est entièrement déterminée par ses intégrales sur tous les grands cercles.

Considérons l'espace $L^2(S)$ des fonctions sur S de carré sommable pour la mesure usuelle (l'aire) et le sous-espace $L^2_+(S)$ formé des fonctions paires.

Les rotations de la sphère envoient ces espaces en eux-mêmes. Ainsi, nous avons obtenu une représentation unitaire T du groupe $SO(3)$ dans $L^2(S)$ et sa sous-représentation T_+ dans $L^2_+(S)$.

Notons par J l'opérateur dans $L^2(S)$ qui agit suivant la formule

$$Jf(x) = \int_{C_x} f(y)\,dy, \tag{5}$$

où C_x est un grand cercle à épicentre au point $x \in S$.

Plus précisément, l'opérateur J se définit par la formule (5) sur le sous-espace $C(S)$ des fonctions continues et se prolonge par continuité à tous les $L^2(S)$. On peut démontrer néanmoins que l'égalité (5) est satisfaite presque partout sur S quel que soit $f \in L^2(S)$.

Notre problème se réduit à établir que le noyau de l'opérateur J est nul (c'est-à-dire que si $Jf = 0$, alors $f = 0$).

Problème 3. Démontrer que l'opérateur J est un opérateur d'entrelacement pour les représentations T et T_+.

Indication. Utiliser l'invariance de l'élément de longueur lors des rotations de la sphère.

D'après la théorie générale nous savons que l'espace $L^2_+(S)$ de la représentation T_+ est la somme directe des sous-espaces irréductibles de dimension finie où tous les opérateurs J sont scalaires.

Nous trouverons maintenant explicitement ces sous-espaces et les valeurs propres de l'opérateur J dans ces sous-espaces. Elles seront toutes non nulles, ce qui démontrera l'assertion cherchée.

Soit P_n l'espace des fonctions sur S qui sont les restrictions à S de tous les polynômes homogènes de degré n dans R^3.

Problème 4. Démontrer que $P_n \subset P_{n+2}$ et que $\dim P_n = (n+1) \times \times (n+2)/2$.

Indication. La première assertion découle de l'égalité $x^2 + y^2 + + z^2 = 1$ sur S. La deuxième se démontre aisément par récurrence.

Soit H_n le supplémentaire orthogonal de P_{n-2} dans P_n.

Théorème 3. *Les décompositions des espaces $L^2(S)$ et $L^2_+(S)$ en espaces irréductibles (par rapport au groupe $SO(3)$) sont de la forme*

$$L^2(S) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n, \quad L^2_+(S) = \sum_{k=0}^{\infty} H_{2k}.$$

Démonstration. Il est clair avant tout que H_n est un sous-espace invariant et que la somme algébrique de ces espaces coïncide avec la réunion des espaces P_n. D'après le théorème de Stone-Weïerstrass (voir 4.2) ce dernier espace est dense dans $C(S)$ et, par conséquent, l'est aussi dans $L^2(S)$. La somme hilbertienne des H_n coïncide avec $L^2(S)$. On voit également que $H_n \subset L^2_+(S)$ si et seulement si n est pair. Pour démontrer le théorème il suffit de vérifier l'irréductibilité de H_n.

Problème 5. Démontrer qu'il existe dans H_n précisément une seule fonction (à constante multiplicative près), invariante par rapport au sous-groupe des rotations autour de l'axe des z.

Indication. Démontrer qu'il y a dans P_n exactement $[n/2] + 1$ fonctions linéairement indépendantes invariantes par rapport au sous-groupe ci-dessus à savoir: z^n, $z^{n-2}(x^2+y^2)$, ..., $z^{n-2[n/2]}(x^2+y^2)^{[n/2]}$.

Problème 6. Démontrer que dans chaque sous-espace irréductible $V \subset L^2(S)$ il y a au moins une fonction invariante par rapport aux rotations autour de l'axe des z.

Indication. Utiliser le théorème de dualité de Frobenius (13.5).

L'irréductibilité de H_n se déduit d'une manière évidente des énoncés des problèmes 5 et 6.

Il nous reste à trouver les valeurs propres de l'opérateur J dans les espaces H_n. Pour cela, indiquons la forme explicite de la fonction $L_n \in H_n$ invariante pour les rotations autour de l'axe des z.

Problème 7. Démontrer que pour L_n on peut prendre la fonction

$$L_n(z) = \frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n] \tag{6}$$

(que l'on appelle n-ième polynôme de Legendre).

I n d i c a t i o n. Vérifier que pour les fonctions sur S qui ne dépendent que de la coordonnée z, nous avons l'égalité

$$\int_S f(x)\,dx = \pi \int_{-1}^{1} f(z)\,dz.$$

Montrer, en intégrant par parties, que L_n est orthogonal à tous les polynômes en z de degré inférieur à n par rapport au produit scalaire

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} f_1(z)\overline{f_2(z)}\,dz.$$

Montrer enfin que L_n se définit par cette propriété à un multiple constant près.

Soit λ_n la valeur propre de l'opérateur J dans H_n. En mettant dans la formule (5) le polynôme L_n pour f et le point $(0, 0, 1)$ pour x, nous obtenons

$$\lambda_n L_n(1) = 2(\pi) L_n(0).$$

Les valeurs $L_n(1)$ et $L_n(0)$ sont faciles à calculer

$$L_n(1) = \frac{d^n}{dz^n}[(z-1)^n(z+1)^n]\,|_{z=1} = n!\,(z+1)^n\,|_{z=1} = 2^n\cdot n!,$$

$$L_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (2k)!\,C_{2k}^k, & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2\pi\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

17.2. Représentations des groupes de Lie compacts classiques. Les groupes de Lie compacts classiques sont les groupes des transformations isométriques de l'espace hilbertien V de dimension finie sur **R**, **C** ou **H**, c'est-à-dire les groupes $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ (voir 5.1, où ces groupes sont notés $O(n, 0)$, $U(n, 0)$, $Sp(n, 0)$ respectivement).

La structure topologique de ces groupes peut être étudiée en partant d'une considération très simple.

P r o b l è m e 1. Soit G_n un des groupes $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$. Démontrer que G_n agit transitivement sur la sphère unité S de l'espace correspondant V et le sous-groupe stationnaire d'un certain point $s_0 \in S$ est isomorphe à G_{n-1}.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les faits suivants.

Problème 2. Démontrer que les groupes $U(n)$ et $Sp(n)$ sont connexes, tandis que $O(n)$ se compose de deux composantes, dont l'une est le groupe $SO(n)$. Le groupe fondamental de $SO(n)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ pour $n = 2$ et à $\mathbf{Z}_2$ pour $n > 2$. Le groupe fondamental de $U(n)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Le groupe $Sp(n)$ est simplement connexe.

Montrons que toutes les représentations irréductibles du groupe G_n peuvent être réalisées dans les tenseurs sur l'espace V.

Une formulation plus précise de cette assertion est la suivante. Soit W l'espace vectoriel complexe qui est la complexification de V (si V est réel), ou bien coïncide avec V (si V est complexe), ou encore s'obtient de V par restriction du corps des scalaires (si V est l'espace des quaternions). Notons $T^{k,l}(W)$ l'espace des tenseurs mixtes de rang (k, l) sur W (voir 3.5) et $\rho^{k,l}$ la représentation du groupe G_n qui apparaît alors dans $T^{k,l}(W)$.

Théorème 1. *Parmi les composantes irréductibles des représentations $\rho^{k,l}$ figurent toutes les représentations irréductibles du groupe G_n.*

Démonstration. Soient $A^{k,l}(G)$ le sous-espace de $C(G_n)$ engendré par tous les éléments matriciaux de la représentation $\rho^{k,l}$ et $A(G) = \sum_{k,l} A^{k,l}(G)$.

Problème 3. Démontrer que $A(G)$ est une sous-algèbre dans $C(G_n)$.

Indication. Utiliser le fait que $\rho^{k_1l_1} \otimes \rho^{k_2l_2} \approx \rho^{k_1+k_2,\, l_1+l_2}$ et démontrer que $A^{k_1l_1}A^{k_2l_2} \subset A^{k_1+k_2,\, l_1+l_2}$.

Problème 4. Démontrer que l'algèbre A est invariante par rapport à la conjugaison complexe.

Indication. Utiliser la relation $(\rho^{k,l})^* \approx \rho^{l,k}$ et en déduire que $\overline{A^{k,l}} = A^{l,k}$.

Remarquons aussi que d'après la définition même de l'espace $A^{1,0}$, les fonctions de cet espace séparent les points du groupe G_n. D'après le théorème de Stone-Weïerstrass (voir 4.2), on peut en déduire à l'aide des problèmes 3 et 4 que l'algèbre $A(G)$ est partout dense dans $C(G_n)$. Soit maintenant ρ une représentation irréductible quelconque du groupe G_n. Si ρ ne se rencontrerait pas dans la décomposition des représentations $\rho^{k,l}$ en composantes irréductibles, on déduirait d'après les relations d'orthogonalité de 9.2 que les éléments matriciaux de la représentation ρ sont orthogonaux à toutes les fonctions de $A(G_n)$. Mais ceci est impossible, puisque $A(G_n)$ est dense dans $C(G_n)$ et, par conséquent, dans $L^2(G_n, dg)$. Le théorème est démontré.

Ainsi, pour classifier toutes les représentations irréductibles du groupe G_n, il suffit de connaître la décomposition des représentations $\rho^{k,l}$ en composantes irréductibles. Ce problème assez difficile a été directement résolu par H. Weyl (voir [57]). Le résultat fondamental peut être énoncé en termes plus modernes de la manière suivante.

Théorème 2 (H. Weyl). *Soit* ρ *la représentation du groupe* G_n *dans l'espace* $\mathcal{T} = \sum_{k, l} T^{k, l}(W)$. *L'algèbre* $\mathscr{C}(\rho, \rho)$ *des opérateurs d'entrelacement pour cette représentation est engendrée par*

1) *les opérateurs de permutation des indices (covariants et contravariants séparément),*

2) *les opérateurs de multiplication par les tenseurs invariants,*

3) *les opérateurs de convolution (pour un indice covariant et un indice contravariant).*

Nous ne déduirons pas ici du théorème 2 la classification complète des représentations irréductibles de G_n. Remarquons qu'elle peut être obtenue par beaucoup d'autres procédés (voir [36], [47, 48] et [54]).

A titre d'exercice utile nous laisserons au lecteur le soin de démontrer le cas particulier suivant du théorème de classification général.

Théorème 3. *Soit* ρ_k *la représentation du groupe* $U(n)$ *dans les tenseurs antisymétriques de rang* k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Démontrer que l'anneau de Grothendieck du groupe* $U(n)$ (voir la définition de cet anneau dans **7.1**) *est isomorphe à*

$$Z[\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n, \rho_n^{-1}].$$

(La représentation ρ_n est de dimension 1, par conséquent, ρ_n^{-1} est bien définie et coïncide avec ρ_n^*.)

17.3. Représentations spinorielles du groupe orthogonal. Les groupes $SO(n, K)$ pour $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ ne sont pas simplement connexes. On sait que pour $n \geqslant 3$ leurs groupes fondamentaux sont isomorphes à Z_2. Le revêtement universel du groupe $SO(n, K)$ est noté Spin (n, K) et s'appellera groupe des spineurs. Ainsi, nous avons la suite exacte

$$1 \to Z_2 \to \mathrm{Spin}(n, K) \to SO(n, K) \to 1. \quad (1)$$

Chaque représentation linéaire du groupe $SO(n, K)$ engendre une représentation de Spin (n, K). Malheureusement, le groupe Spin (n, K) possède d'autres représentations qui ne s'obtiennent pas de cette manière. Ces représentations peuvent être considérées comme bivaluées (c'est-à-dire projectives avec multiplicateur à valeurs ± 1) du groupe $SO(n, K)$.

La plus simple parmi ces représentations est de dimension $2^{[n/2]}$. Elle est irréductible si n est impair et se décompose si n est pair en une somme de deux composantes non équivalentes de même dimension.

Décrivons ici une construction explicite de cette représentation. Soit C_k l'algèbre de Clifford complexe à n générateurs $e_1, \ldots, e_k$ et aux relations (cf. avec **3.5**)

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \text{ pour } i \neq j, \; e_i^2 = 1. \quad (2)$$

P r o b l è m e 1. Démontrer que

$$C_{2k} \approx \mathrm{Mat}_{2^k}(\mathbf{C}), \quad C_{2k+1} \approx \mathrm{Mat}_{2^k}(\mathbf{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^k}(\mathbf{C}).$$

I n d i c a t i o n. Utiliser la méthode de solution du problème 8 de 3.5 et démontrer que

$$C_{k+2} = C_k \underset{\mathbf{C}}{\otimes} C_2, \quad C_0 = \mathbf{C}, \quad C_1 = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}.$$

P r o b l è m e 2. Démontrer que le centre de l'algèbre C_{2k+1} est engendré par les éléments 1 et $\varepsilon = e_1 e_2 \ldots e_{2k+1}$.

I n d i c a t i o n. Considérer le commutateur du monôme $e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ aux générateurs $e_1, \ldots, e_n$.

Soit maintenant $A \in SO(n, \mathbf{C})$. La transformation

$$e_i \mapsto \sum_j a_{ij} e_j, \quad \|a_{ij}\| = A \tag{3}$$

qui laisse vérifiées les relations (2) et définit donc un automorphisme $\varphi(A)$ de l'algèbre C_n.

P r o b l è m e 3. Démontrer que les automorphismes $\varphi(A)$, $A \in SO(n, \mathbf{C})$ ne modifient pas les éléments du centre de C_n.

I n d i c a t i o n. Utiliser le résultat du problème 2 et le fait que $\det A = 1$ pour $A \in SO(n, \mathbf{C})$.

De l'énoncé du problème 3 il découle que pour $n = 2k + 1$ l'automorphisme $\varphi(A)$ se détermine par un certain automorphisme de l'algèbre des matrices $\mathrm{Mat}\, 2_{2^k}(\mathbf{C})$.

Ainsi nous pouvons pour un n quelconque considérer $\varphi(A)$ comme un automorphisme de l'algèbre des matrices complète sur $\mathbf{C}$ d'ordre $2^{[n/2]}$.

Comme nous savons (voir **14.1**), chaque automorphisme de $\mathrm{Mat}_k(\mathbf{C})$ est interne. Par conséquent,

$$\varphi(A)(X) = \rho(A)\, X\, \rho(A)^{-1} \tag{4}$$

pour une certaine matrice $\rho(A) \in \mathrm{Mat}_2^{[n/2]}(\mathbf{C})$.

Il est clair que l'application $A \mapsto \rho(A)$ est une représentation projective du groupe $SO(n, \mathbf{C})$. C'est justement la représentation cherchée. Montrons maintenant que cette représentation peut être rendue bivaluée, c'est-à-dire qu'on peut choisir $\rho(A)$ de manière à satisfaire l'égalité

$$\rho(A_1)\, \rho(A_2) = \pm\, \rho(A_1, A_2).$$

Utilisons pour cela les résultats de **14.3**. Vu que le groupe $SO(n, \mathbf{C})$ est semi-simple, la représentation ρ s'obtient de la représentation linéaire $\tilde{\rho}$ du revêtement du groupe Spin $(n, \mathbf{C})$. La représentation correspondante $\tilde{\rho}_*$ $(= \rho_*)$ de l'algèbre de Lie est facile à calculer.

Problème 4. Soit $A \in \mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ une matrice complexe antisymétrique. Alors,

$$\rho_* (A) = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} e_i e_j. \qquad (5)$$

Indication. Comparer l'action des deux membres de l'égalité (5) sur les générateurs $e_1, \ldots, e_n$.

Par conséquent, l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ est envoyée par la représentation ρ_* dans le sous-espace $C_n^{(2)}$ des éléments homogènes de degré 2 dans C_n. Pour un choix convenable de l'identification de C_n avec l'algèbre des matrices, ce sous-espace sera contenu dans $\mathfrak{so}(2^{[n/2]}, \mathbf{C})$. Le sous-groupe correspondant dans $SO(2^{[n/2]}, \mathbf{C})$ sera justement Spin $(n, \mathbf{C})$.

Ce groupe peut également être caractérisé comme composante connexe du sous-groupe $\Gamma \subset SO(2^{[n/2]}, \mathbf{C})$ qui laisse invariant le sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_n$ pour l'action de ses automorphismes internes.

En utilisant la formule (5), on vérifie aisément que le sous-groupe fermé à un paramètre de $SO(n, \mathbf{C})$ qui correspond à la rotation complète dans le plan de dimension 2 est envoyé par la représentation $\tilde{\rho} = \exp \rho_*$ dans une courbe non fermée joignant le point 1 avec le point -1. La représentation $\tilde{\rho}$ est donc bivaluée sur $SO(n, \mathbf{C})$.

Considérons maintenant la réductibilité de la représentation ρ.

Problème 5. Démontrer que le centralisateur du sous-espace $C_n^{(2)}$ de C_n est engendré par les éléments 1 et $e_1 e_2 \ldots e_n$.

Ainsi, pour n impair, la représentation ρ est irréductible, car tout opérateur permutable aux opérateurs de l'image de l'algèbre de Lie appartient au centre de C_n tout en étant scalaire sur chacun des deux sous-espaces équivalents de l'algèbre $C_n = \mathrm{Mat}_{2^{[n/2]}}(\mathbf{C}) \oplus \oplus \mathrm{Mat}_{2^{[n/2]}}(\mathbf{C})$.

Dans le cas où n est pair, l'élément $e_1 e_2 \ldots e_{2n}$ est un opérateur d'entrelacement non trivial de la représentation ρ. Donc, ρ est la somme de deux sous-représentations ρ_+ et ρ_-.

Problème 6. Démontrer que les représentations ρ_+ et ρ_- ne sont pas équivalentes et sont de même dimension.

Indication. Utiliser la relation $c(\rho, \rho) = 2$ et l'égalité $(e_1 e_2 \ldots e_{2n})^2 = (-1)^n$.

Problème 7. Démontrer que la restriction de la représentation spinorielle ρ du groupe Spin $(2n+1, \mathbf{C})$ sur le sous-groupe Spin $(2n, \mathbf{C})$ est équivalente à $\rho_+ + \rho_-$ et la restriction de chacune des représentations $\rho_\pm$ sur Spin $(2n-1, \mathbf{C})$ est irréductible et équivalente à la représentation spinorielle de ce groupe.

Indication. Calculer le nombre d'entrelacement correspondant et comparer les structures des algèbres C_{2n+1}, C_{2n}, C_{2n-1}.

Le cas $K = \mathbf{R}$ admet les raisonnements analogues, mais plus compliqués. Le type de l'algèbre de Clifford correspondante ainsi que les propriétés des représentations spinorielles dépendent de la classe de congruence modulo 8 du nombre n.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les assertions suivantes.

Problème 8. La représentation spinorielle ρ du groupe Spin $(2k+1, \mathbf{R})$ est de type réel pour $k \equiv 0,3 \bmod 4$ et de type quaternionien pour $k \equiv 1, 2 \bmod 4$.

Les représentations ρ_+ et ρ_- semi-spinorielles du groupe Spin $(2k, \mathbf{R})$ sont conjuguées complexes pour $k \equiv 1 \bmod 2$, réelles pour $k \equiv 0 \bmod 4$ et de type quaternionien pour $k \equiv 1 \bmod 4$.

Ces deux représentations sont duales l'une à l'autre pour k impair et autoduales pour k pair.

§ 18. GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

18.1. Représentations d'une algèbre de Lie simple de dimension 3. Comme nous avons déjà remarqué dans 6.2, il existe précisément deux algèbres de Lie réelles simples de dimension 3. Ce sont l'algèbre $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ des matrices réelles d'ordre 2 à trace nulle et l'algèbre $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{so}(3, \mathbf{R})$ des matrices réelles antisymétriques d'ordre 3.

Nous obtiendrons dans ce numéro la classification de toutes les représentations irréductibles de dimension finie des algèbres $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sur le corps $\mathbf{C}$.

Chacune de ces représentations se prolonge par linéarité à une représentation de l'enveloppe complexe de l'algèbre de Lie correspondante.

Problème 1. Démontrer que les enveloppes complexes des algèbres $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont isomorphes.

Indication. L'isomorphisme cherché de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b-c & -i(b+c) \\ c-b & 0 & 2ia \\ i(b+c) & -2ia & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il suffit d'étudier les représentations irréductibles de l'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \approx \mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$.

Choisissons dans $\mathfrak{g}$ une base (sur $\mathbf{C}$):

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les relations de commutation entre les vecteurs de base s'écrivent

$$[X_0 X_\pm] = \pm 2X_\pm, \quad [X_+, X_-] = X_0. \tag{1}$$

Soit T une représentation de dimension finie de l'algèbre $\mathfrak{g}$ dans l'espace V. Alors l'opérateur $T(X_0)$ possède dans V au moins un vecteur propre ξ, à valeur propre λ:

$$T(X_0)\,\xi = \lambda\xi. \tag{2}$$

Nous appellerons ce vecteur ξ *vecteur pondérable* de poids λ.

Problème 2. Démontrer que si ξ est un vecteur de poids λ, alors $T(X_\pm)\,\xi$ est soit un vecteur nul, soit un vecteur de poids $\lambda \pm 2$.
Indication. Utiliser la relation (1).

Vu que l'espace V est de dimension finie il contient un vecteur pondérable ξ de poids maximal λ (nous ordonnons les poids d'après leur partie réelle; comme nous verrons plus loin, tous les poids des représentations de dimension finie sont en fait des nombres réels). Ce vecteur satisfait non seulement à la condition (2) mais aussi à la condition

$$T(X_+)\,\xi = 0. \tag{3}$$

Considérons la suite des vecteurs

$$\xi_0 = \xi,\ \xi_1 = T(X_-)\,\xi_0,\ \xi_2 = T(X_-)\xi_1,\ \ldots$$

D'après le problème 2, tous les vecteurs non nuls de cette suite sont des vecteurs pondérables avec des poids différents. Ils sont donc linéairement indépendants. Cela signifie que la suite ne possède qu'un nombre fini de membres non nuls.

Supposons que ξ_n soit le dernier vecteur non nul de cette suite.

Problème 3. Démontrer que l'espace engendré par les vecteurs $\xi_0, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ est invariant par rapport aux opérateurs de représentation et irréductible.
Indication. Utiliser les relations $T(X_-)\,\xi_k = \xi_{k+1}$, $T(X_0)\,\xi_k = (\lambda - 2k)\,\xi_k$ et démontrer par récurrence que

$$T(X_+)\,\xi_k = k(\lambda - k + 1)\,\xi_{k-1}.$$

Problème 4. Démontrer que le paramètre λ est égal au nombre n.
Indication. Utiliser l'égalité $\operatorname{tr} T(X_0) = \operatorname{tr} T(X_+X_- - X_-X_+) = \operatorname{tr}[T(X_+), T(X_-)] = 0$.
Ainsi nous avons démontré le

Théorème 1. *Pour chaque entier non négatif n il existe précisément une représentation irréductible T_n de l'algèbre $\mathfrak{g}$ de dimension $n+1$. Dans la base formée des vecteurs pondérables les opérateurs de représentation s'écrivent:*

$$\left.\begin{aligned} T(X_-)\,\xi_k &= \xi_{k+1}, \\ T(X_0)\,\xi_k &= (n-2k)\,\xi_k, \\ T(X_+)\,\xi_k &= k(n-k+1)\,\xi_{k-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Notons le fait suivant.

Corollaire. *Pour chaque représentation irréductible T, il existe un seul (à un multiple scalaire près) vecteur ξ qui s'annule par l'opérateur $T(X_+)$. Ce vecteur est pondérable et son poids est égal à* $\dim T - 1$.

D'après les résultats des numéros **6.3** et **6.4** sur les relations entre les représentations des groupes et des algèbres, le théorème 1 donne aussi une classification des représentations irréductibles de dimension finie des groupes de Lie $SL(2, \mathbf{R})$ $\widetilde{SO}(3, \mathbf{R}) = SU(2)$ et des représentations analytiques du groupe de Lie complexe $SL(2, \mathbf{C})$.

Problème 5. Soit P_n l'espace des polynômes homogènes de degré n de deux variables p et q. Définissons l'action du groupe $SL(2, \mathbf{C})$ dans P_n en posant

$$\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} f\right](p, q) = f(ap + cq, bp + dq).$$

Démontrer que la représentation correspondante T_* de l'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ est équivalente à T_n.

Indication. Les opérateurs de la représentation de $\mathfrak{g}$ sont donnés par les formules

$$T_*(X_+) = p\frac{\partial}{\partial q}, \quad T^*(X_0) = p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q}, \quad T_*(X_-) = q\frac{\partial}{\partial p}.$$

L'isomorphisme entre V_n et P_n est de la forme

$$\xi_k \leftrightarrow n(n-1)\ldots(n-k+1)\,p^{n-k}q^k,$$

où $\{\xi_k\}$ est la base de V_n définie ci-dessus.

18.2. Algèbre de Weyl et décomposition des produits tensoriels. On appelle *algèbre de Weyl* $A_n(K)$ l'algèbre unitaire sur un corps K engendrée par les générateurs

$$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$$

et les relations

$$p_ip_j = p_jp_i, \quad q_iq_j = q_jq_i, \quad p_iq_j - q_jp_i = \delta_{ij}\cdot 1. \tag{1}$$

Cette algèbre est un cas particulier de l'algèbre $R_{n,\,h}(K)$ définie dans **3.5**, à savoir $A_n(K) = R_{n,\,0}(K)$.

Montrons ici que l'algèbre $A_1(K)$ permet de trouver les formules explicites pour la décomposition en composantes irréductibles du produit tensoriel de deux représentations irréductibles du groupe $SL(2, K)$.

Chaque élément de l'algèbre $A_1(K)$ s'écrit sous forme de polynôme (non commutatif) des variables p et q à coefficients dans K. Cette notation n'est pas unique. Par exemple, l'élément pq peut s'écrire sous la forme $qp + 1$ ou sous la forme $(pq^2) - qp^2q$, etc. On

peut proposer trois méthodes naturelles pour rendre cette notation unique:

a) notation à gauche: $f = \sum c_{kl} p^k q^l$,

b) notation à droite: $f = \sum c_{kl} q^l p^k$,

c) notation symétrique: $f = \sum c_{kl}\, \sigma(p^k q^l)$, où σ désigne *le produit symétrique*

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} x_{s(1)} \ldots x_{s(n)}.$$

Chacune de ces méthodes identifie l'espace (mais pas l'algèbre!) A_1 avec l'espace $K[p, q]$ de tous les polynômes (commutatifs) de p et q à coefficients dans K (pour un corps K de caractéristique nulle).

Le passage d'une notation à l'autre définit un automorphisme de l'espace $K[p, q]$. L'étude de la forme explicite de ces isomorphismes nous donne le

Théorème 1. *Le passage de la notation à gauche à la notation symétrique et de cette dernière à la notation à droite engendre dans $K[p, q]$ l'automorphisme*

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p\, \partial q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!\, 2^j} \frac{\partial^{2j}}{\partial p^j\, \partial q^j}.$$

La démonstration s'obtient par récurrence à l'aide de l'identité

$$\sigma(p^k q^l) = \frac{k}{k+l}\, p\sigma(p^{k-1} q^l) + \frac{l}{k+l}\, q\sigma(p^k q^{l-1}). \tag{2}$$

Il serait intéressant de trouver une démonstration plus brève et directe. (Il est utile, par exemple, d'utiliser la réalisation de l'algèbre $A_1(\mathbf{R})$ comme anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur la droite réelle.)

Supposons que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $SL(2, K)$.

Alors, la transformation

$$\left.\begin{aligned} p &\mapsto ap + bq, \\ q &\mapsto cp + dq \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ne modifie pas les relations (1) et, par conséquent, se prolonge à un automorphisme de $A_1(K)$. Par ailleurs, cette transformation se prolonge naturellement à un automorphishe de $K[p, q]$.

Problème 1. Démontrer que l'isomorphisme σ entre $K[p, q]$ et $A_1(K)$ est permutable à l'action du groupe $SL[2, K]$.

Indication. Utiliser le fait que $K[p, q]$ est engendré (comme espace vectoriel) pour les éléments de la forme $(p + \lambda q)^k$ et vérifier l'identité

$$\sigma((p + \lambda_q)^k) = (p + \lambda q)^k \text{ dans } A_1(K),$$

en comparant les coefficients des termes de même degré en λ. Comparer également avec le problème 8 de **10.4.**

Comme nous avons vu dans **18.1**, la représentation de $SL(2, K)$ de l'espace $K[p, q]$ se décompose en une somme directe de représentations irréductibles de dimension finie. De cette décomposition font partie exactement une fois toutes les représentations irréductibles de dimension finie du groupe $SL(2, K)$. Les sous-espaces irréductibles $\widetilde{V}_n$ se composent des polynômes homogènes de degré n. La dimension de $\widetilde{V}_n$ est égale à $n+1$. Soient V_n l'image de $\widetilde{V}_n$ dans $A_1(K)$ par l'application σ et T_n la représentation de $SL(2, K)$ dans V_n.

Notons $V_n \cdot V_m$ le sous-espace de $A_1(K)$ engendré par les produits xy, $x \in V_n$, $y \in V_m$.

Théorème 2. *L'application du produit*

$$x \otimes y \mapsto xy$$

se prolonge par linéarité à un isomorphisme de $V_n \otimes V_m$ *sur* $V_n \cdot V_m$. *L'espace* $V_n \cdot V_m$ *est la somme directe des sous-espaces de la forme* V_{n+m-2k}, $k = 0, 1, \ldots, \min(m, n)$.

Démonstration. Considérons le produit des éléments $p^n \in V_n$ et $q^m \in V_m$. D'après le théorème 1

$$p^n q^m = \sum_j \frac{1}{2^j \cdot j!} \sigma\left(\frac{\partial^{2j}}{\partial p^j \partial q^j} p^n q^m\right) =$$

$$= \sigma(p^n q^m) + \frac{nm}{2} \sigma(p^{n-1} q^{m-1}) + \frac{n(n-1)m(m-1)}{8} \sigma(p^{n-2} q^{m-2}) + \ldots$$

Mais l'élément $\sigma(p^{n-k} q^{m-k})$ appartient à V_{n+m-2k}. Par conséquent, l'espace $V_n V_m$ contient tous les sous-espaces de la forme V_{n+m-2k}, $k = 0, 1, \ldots, \min(m, n)$. La somme des dimensions de ces sous-espaces est égale à

$$\sum_{k=0}^{\min(m, n)} (n + m - 2k + 1) = (m+1)(n+1),$$

c'est-à-dire à la dimension de $V_n \otimes V_m$. Le théorème est démontré.

Les théorèmes 1 et 2 permettent d'écrire explicitement la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles du groupe $SL(2, K)$. Les calculs nécessaires à cette fin consistent à trouver la notation symétrique du produit de deux éléments donnés dans leur forme symétrique.

La méthode ci-dessus peut être appliquée à l'étude des produits tensoriels des représentations irréductibles du groupe simplectique $Sp(2n, K)$. Ce groupe agit naturellement comme groupe des automorphismes de l'algèbre de Weyl $A_n(K)$. Soit P_k l'espace des polynômes homogènes de degré k des variables $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ et $V_k = \sigma(P_k) \subset A_n(K)$. On peut vérifier que l'espace V_k est irréductible et que l'analogue du théorème 2 a également lieu.

Mais contrairement au cas $k = 1$, cette méthode ne donne qu'une faible partie des représentations irréductibles du groupe $Sp(2n, K)$. Il serait très

intéressant de généraliser la méthode ci-dessus de manière à obtenir les autres représentations de ce groupe.

18.3. Structure de l'algèble enveloppante $U(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. Nous donnerons dans ce numéro une description des idéaux bilatères de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$.

Il sera commode d'utiliser la base

$$2X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2Y=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad 2Z=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

liée à la base X_+, X_-, X_0 introduite dans **18.1** par les relations

$$\frac{1}{2}X_+=\frac{1}{2}(X+iY), \quad \frac{1}{2}X_-=\frac{1}{2}(X-iY), \quad \frac{1}{2}X_0=iZ.$$

Les éléments X, Y, Z engendrent $U(\mathfrak{g})$ et satisfont aux relations

$$XY-YX=Z, \; YZ-ZY=X, \; ZX-XZ=Y. \tag{1}$$

Rappelons que la notation symétrique établit l'isomorphisme σ entre l'espace $\mathbf{C}[X, Y, Z]$ de tous les polynômes des variables X, Y, Z et l'espace $U(\mathfrak{g})$, et cet isomorphisme est permutable à l'action du groupe adjoint (voir problème 8 dans **10.4**).

Dans notre cas, le groupe adjoint est le groupe $SO(3, \mathbf{C})$ et la représentation adjointe l'homomorphisme bien connu de $SL(2, \mathbf{C})$ sur $SO(3, \mathbf{C})$ (l'application correspondante de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ sur $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ a été décrite dans **18.1**).

P r o b l è m e 1. Démontrer que chaque polynôme $P \in \mathbf{C}[X, Y, Z]$ invariant par rapport à $SO(3, \mathbf{C})$ est de la forme $f(R)$, où

$$R=X^2+Y^2+Z^2.$$

I n d i c a t i o n. Le groupe $SO(3, \mathbf{C})$ agit transitivement sur les sphères $X^2+Y^2+Z^2=\text{const}\neq 0$.

D'où en vertu du théorème 2 de **10.4** il s'ensuit que le centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ est engendré par l'élément $\sigma(R)$.

Notons que la restriction de σ sur $\mathbf{C}[R]$ n'est pas un isomorphisme des algèbres $\mathbf{C}[R]$ et $Z(\mathfrak{g})$ (quoique ces algèbres sont isomorphes). Par exemple, on peut vérifier que

$$\sigma(R^2)=[\sigma(R)]^2-\frac{1}{3}\sigma(R).$$

Pour ce qui suit il nous faut connaître la forme explicite des sous-espaces invariants pour le groupe $SO(3, \mathbf{C})$ dans l'espace $\mathbf{C}[X, Y, Z]$.

Pour décrire cette forme, introduisons l'espace H_n des polynômes harmoniques homogènes de degré n, c'est-à-dire des polynômes P, qui satisfont à la condition

$$\Delta P=\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial Z^2}=0. \tag{2}$$

Problème 2. Démontrer que H_n est invariant et irréductible par rapport au groupe SO (3, C) et la représentation correspondante T de l'algèbre de Lie est équivalente à T_{2n} dans les notations de 18.1.

Indication. Démontrer que l'opérateur Δ est permutable à l'action du groupe SO (3, C) et X_+^n est l'élément unique de H_n (à facteur scalaire près) annulé par l'opérateur

$$T(X_+) = -2X_+ \frac{\partial}{\partial X_0} + X_0 \frac{\partial}{\partial X_-}.$$

Problème 3. Démontrer que chaque sous-espace irréductible H de $C[X, Y, Z]$ se met sous la forme

$$H = f(R) H_n.$$

Indication. Utilisant la forme explicite du sous-groupe à un paramètre $S_t = e^{tT(X_+)}$, démontrer que chaque élément $P \in C[X, Y, Z]$ invariant par rapport à S_t est un polynôme en X_+ et en R. Utiliser aussi le fait que X_+ est de poids 2 et R de poids zéro.

Problème 4. Démontrer que chaque sous-espace de $U(\mathfrak{g})$ irréductible par rapport au groupe adjoint est de la forme

$$\sigma(f(R))\,\sigma(H_n) \tag{3}$$

pour une certaine fonction $f \in C[R]$ et un certain entier $n \geqslant 0$.

Indication. Utiliser les résultats du problème 3.

Supposons maintenant que I soit un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$. Il est alors invariant par rapport à l'opération de commutation avec les éléments de $\mathfrak{g}$ et, par conséquent, par rapport à l'action du groupe adjoint. I est donc la somme directe des sous-espaces de la forme (3) et, par conséquent, peut se mettre sous la forme

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \sigma(H_n), \tag{4}$$

où I_n est un certain sous-espace de $Z(\mathfrak{g})$.

Vu que I est un idéal, il est clair que tous les I_n sont des idéaux dans $Z(\mathfrak{g})$. Mais dans l'anneau des polynômes d'une seule variable chaque idéal est principal. Par conséquent, $I_n = f_n(\sigma(R))\, Z(\mathfrak{g})$ pour un certain polynôme f_n défini à un multiple constant près.

Ainsi, *chaque idéal bilatère $I \subset U(\mathfrak{g})$ est caractérisé par une famille de polynômes f_n d'une seule variable.*

Problème 5. Démontrer que $I_n \subset I_{n+1}$ et, par conséquent, f_n se divise par f_{n+1}.

Indication. Utiliser l'invariance de I par rapport à la multiplication par $\sigma(X_+)$ et le fait que $X_+^n \in H_n$.

Montrons maintenant que le rapport f_n/f_{n+1} n'est pas luiaussi arbitraire. Pour cela, étudions en détail l'espace $\sigma(H_n)\,\sigma(H_1)$ engendré par les produits des éléments de $\sigma(H_n)$ par les éléments de $\sigma(H_1)$. Des résultats de 18.2 il découle que la représentation de l'al-

gèbre $\mathfrak{g}$ dans $\sigma(H_n)\sigma(H_1)$ ne peut contenir que les composantes $T_{2n+2}T_{2n}$ et T_{2n-2}.

Les représentations correspondantes se réalisent, d'après le problème 4, dans les espaces $\sigma(f(R))\sigma(H_{n+1})$, $\sigma(g(R))\sigma(H_n)$ et $\sigma(h(R))\sigma(H_{n-1})$ respectivement. La considération des termes de degré maximal nous montre que les polynômes f et g sont de degré 0 (c'est-à-dire sont des constantes) et le degré du polynôme h ne dépasse pas 1.

Ainsi,

$$\sigma(H_n)\sigma(H_1) \subset \sigma(H_{n+1} + \sigma(H_n) + (\alpha_n\sigma(R) + \beta_n)\sigma(H_{n-1}).$$

Trouvons la forme explicite de la décomposition de l'élément $X_+^nX_- \in \sigma(H_n)\sigma(H_1)$. Vu que cet élément est de poids $2n - 2$, sa composante dans $\sigma(H_{n+1})$ est proportionnelle à $(adX_-)^2X_+^{n+2}$, sa composante dans $\sigma(H_n)$ à $adX_-\cdot X_+^n$ et la dernière composante est de la forme $(\alpha_n\sigma(R) + \beta_n)X_+^{n-1}$.

Utilisant les relations de commutation entre X_+, X_- et X_0, il est facile de calculer que

$$(a\,dX_-)^2X_+^{n+1} = -(n+1)[2X_+^nX_- - nX_+^{n-1}(X_0+n)(X_0+n-1)],$$

$$(a\,dX_-)X_+^n = -nX_+^{n-1}(X_0+n-1),$$

$$(\alpha_n\sigma(R)+\beta_n)X_+^{n-1} = 4\alpha_nX_+^nX_- + X_+^{n-1}[\alpha_nX_0(2-X_0)+\beta_n].$$

D'où il est aisé de trouver les coefficients α_n et β_n:

$$\alpha_n = \frac{n}{4n-2}, \quad \beta_n = \frac{n^3-n}{4n-2}.$$

Le résultat obtenu a un corollaire important.

Problème 6. Démontrer que l'idéal I_{n-1} contient $[\sigma(R) + n^2 - 1]I_n$.

Indication. Si $f \in I_n$, alors $f(\sigma(R))X_+^nX_- \in I$ et donc $t(\sigma(R))(\alpha_n\sigma(R) + \beta_n) \in I_{n-1}$.

Par conséquent, si $\{f_n\}$ est une famille de polynômes qui caractérise l'idéal I, alors le rapport f_{n-1}/f_n est un diviseur du monôme $\sigma(R) + n^2 - 1$.

Problème 7. Démontrer que la condition obtenue n'est pas seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que la suite $\{f_n\}$ corresponde à un certain idéal $I \supset U(\mathfrak{g})$.

Indication. Utiliser le fait que l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ est engendrée par l'espace $\sigma(H_1)$.

Etudions en plus de détails les familles $\{f_n\}$ qui satisfont à la condition obtenue.

Normons les polynômes f_n en prenant le coefficient du terme de degré maximal soit égal à 1. Il est alors clair que la suite $\{f_n\}$ se stabilise: à partir d'un certain N nous aurons $f_N = f_{N+1} =$

$= f_{N+2} = \ldots$ Désignons dans ce cas f_N par f_∞. Pour trouver toute la suite $\{f_n\}$ il suffit de donner en plus de f_∞ le nous-ensemble S des entiers naturels formé de tous les nombres n pour lesquels $f_n \neq \neq f_{n-1}$. Alors

$$f_n(x) = f_\infty x \prod_{\substack{k \in S \\ k \geqslant n}} [x + k(k+2)].$$

Il est intéressant de comparer la structure des idéaux dans $U(\mathfrak{g})$ avec la structure des idéaux dans $Z(\mathfrak{g})$. L'intersection de chaque idéal $I \subset U(\mathfrak{g})$ est un idéal I_0, engendré par le polynôme

$$f_0(\sigma(R)) = f_\infty(\sigma(R)) \prod_{k \in S} [\sigma(R) + k(k+2)].$$

Si f_0 n'a pas de racines de la forme

$$-k(k+2),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

I se définit de façon unique à partir de I_0, à savoir, $I = I_0 U(\mathfrak{g})$. Dans le cas contraire, il y a plusieurs idéaux $I \subset U(\mathfrak{g})$ ayant la même intersection I_0 avec $Z(\mathfrak{g})$. Le nombre de ces idéaux est égal à 2^m, où m est le nombre de racines de f_0 de la forme (3).

En particulier, aux *idéaux simples de* $Z(\mathfrak{g})$ *pour lesquels* $f_0(x) = x - \lambda$ *correspondent soit un seul idéal dans* $U(\mathfrak{g})$, *soit deux.*

Il serait très intéressant d'obtenir une description analogue de la structure des idéaux pour les algèbres enveloppantes d'autres algèbres de Lie.

18.4. Représentations spinorielles du groupe simplectique. Soit $A_n(\mathbf{R})$ l'algèbre de Weyl définie dans **18.2**. Par rapport à l'opération $[x, y] = xy - yx$, elle est une algèbre de Lie réelle de dimension infinie. Notons σ l'isomorphisme de $\mathbf{R}[p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n]$ sur $A_n(\mathbf{R})$ donné par la notation symétrique (voir **18.2**).

P r o b l è m e. Démontrer que si x et y sont deux polynômes en $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ de degré k et l respectivement, alors $[x, y]$ est un polynôme de degré $\leqslant k + l - 2$.

Il en découle que l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant 2$ des variables $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ est une sous-algèbre dans $A_n(\mathbf{R})$. Noterons la $\mathfrak{st}(n, \mathbf{R})$. Il est également clair que les polynômes de degré $\leqslant 1$ forment un idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{st}(n, \mathbf{R})$ et les constantes son centre $\mathfrak{z}$. Notons $\mathfrak{m}$ le sous-espace engendré par les générateurs et $\mathfrak{a}$ le sous-espace des polynômes symétriques homogènes de degré 2 des générateurs. Il est aisé alors de vérifier que

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}, \qquad [\mathfrak{a}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \qquad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{z}.$$

Soit $\widetilde{St}(n, \mathbf{R})$ le groupe de Lie connexe, simplement connexe, qui correspond à l'algèbre $\mathfrak{st}(n, \mathbf{R})$ (cf. la page 266). Notons A, N et Z

les sous-groupes correspondant aux sous-algèbres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$. Le groupe N est généralement appelé *groupe de Heisenberg*.

P r o b l è m e 1. Démontrer que N est isomorphe au groupe des matrices d'ordre $n+2$ de la forme:

$$g(a, b, c)=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où a est un vecteur-ligne de dimension n, b un vecteur-colonne de dimension n et 1_n la matrice unité d'ordre n.

I n d i c a t i o n. Vérifier l'isomorphisme des algèbres de Lie correspondantes.

P r o b l è m e 2. Démontrer que l'algèbre $\mathfrak{a}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2n, \mathbf{R})$ du groupe simplectique $Sp(2n, \mathbf{R})$ et le groupe A au revêtement universel du groupe $Sp(2n, \mathbf{R})$.

I n d i c a t i o n. Considérer la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{m}$. Démontrer que $\widetilde{St}(n, \mathbf{R}) = A \cdot N$ (produit semi-direct).

Le groupe N possède une série de représentations unitaires irréductibles U_λ, $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Ces représentations agissent dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ par la formule

$$U_\lambda(g(a, b, c)) f(x)=e^{i\lambda(bx+c)} f(x+a). \tag{1}$$

Ici, pour simplifier les notations, nous écrivons x au lieu de $x_1, \ldots, x_n$ et bx au lieu de $\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$, etc.

La représentation correspondante de l'algèbre de Lie est de la forme

$$p_j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad q_j \mapsto i\lambda x_j, \quad 1 \mapsto i\lambda. \tag{2}$$

La représentation (2) peut être prolongée à une représentation de $\mathfrak{st}(n, \mathbf{R})$ par les formules

$$p_j p_k \mapsto \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad q_j p_k \mapsto$$
$$\mapsto x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad q_j q_k \to i\lambda x_j x_k. \tag{3}$$

P r o b l è m e 3. Démontrer que la représentation ainsi obtenue correspond à une certaine représentation unitaire T_λ du groupe $\widetilde{St}(n, \mathbf{R})$.

I n d i c a t i o n. Utiliser le critère de Nelson de 10.5.

La restriction de la représentation T_λ au groupe A sera notée S_λ et appelée représentation spinorielle.

P r o b l è m e 4. Démontrer que les représentations S_λ et S_μ sont équivalentes si et seulement si $\lambda\mu > 0$.

I n d i c a t i o n. Considérer la transformation de l'espace $L^2(\mathbf{R}^n)$ qui correspond à une homothétie de $\mathbf{R}^n$. La non-équivalence de S_λ et S_μ pour $\lambda\mu < 0$ découle de la considération du spectre de l'opérateur qui correspond à l'élément q^2.

P r o b l è m e 5. Démontrer que les représentations spinorielles S_λ sont réductibles et se décomposent en deux composantes irréductibles qui agissent dans les sous-espaces des fonctions paires et impaires respectivement.

I n d i c a t i o n. Démontrer que l'espace $\mathscr{C}(S_\lambda)$ est engendré par l'opérateur identique et l'opérateur de symétrie relativement à l'origine des coordonnées.

Considérons en détail le cas $n = 1$. Le groupe $Sp(2, \mathbf{R})$ est isomorphe à $SL(2, \mathbf{R})$. Chaque matrice de $SL(2, \mathbf{R})$ se met de façon unique sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le groupe $SL(2, \mathbf{R})$ est topologiquement équivalent à $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^2$. Son revêtement universel est homéomorphe à $\mathbf{R}^3$ et son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

P r o b l è m e 6. Vérifier que l'isomorphisme entre $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ et l'algèbre $\mathfrak{a}$, engendrée par les éléments p^2, q^2 et $pq + qp$ dans $A_1(\mathbf{R})$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \longleftrightarrow \frac{1}{2}[a(pq+qp)+bq^2-cp^2].$$

I n d i c a t i o n. Utiliser les relations

$$[p^2, q^2] = 2(pq + qp), \quad [pq, p^2] = -2p^2, \quad [pq, q^2] = 2q^2.$$

Nous montrerons maintenant que la représentation spinorielle S_λ n'est pas une représentation univoque de $SL(2, \mathbf{R})$ mais le devient déjà sur le revêtement à deux feuilles de ce groupe. Pour cela, nous considérerons l'élément $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ qui correspond au sous-groupe fermé de dimension 1 $SO(2, \mathbf{R}) \subset \subset SL(2, \mathbf{R})$.

Dans l'algèbre $\mathfrak{a}$ à cet élément correspond l'expression $^1/_2(p^2 + q^2)$ envoyée par la représentation $S_{\pm 1}$ dans l'opérateur $\mp i(x^2 + d^2/dx^2)$.

Pour étudier cet opérateur, il est commode de passer de la réalisation de la représentation dans l'espace $L^2(\mathbf{R})$ à une autre réalisation dans l'espace $H^2(\mathbf{C})$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ de carré intégrable pour la mesure $e^{-|z|^2}\,dx\,dy$ (où $z = x + iy$).

P r o b l è m e 7. Démontrer que les opérateurs z et d/dz sont conjugués l'un à l'autre dans $H^2(\mathbf{C})$.

I n d i c a t i o n. Utiliser le fait que les polynômes en z sont denses dans H^2 (C) et la formule

$$\iint_{\mathbf{C}} |z|^{2k} e^{-|z|^2} dx\, dy = \pi k\,!.$$

Les représentations de l'algèbre $\mathfrak{n}$ dans H^2 (C) sont données par la formule

$$p \mapsto \frac{i}{\sqrt{2}}\left(z + \frac{d}{dz}\right), \quad q \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{d}{dz}\right), \quad 1 \mapsto i\lambda,$$

et la représentation correspondante de $\mathfrak{a}$ est de la forme

$$p^2 \mapsto \frac{i}{2\lambda}\left(z + \frac{d}{dz}\right)^2, \quad (pq+qp) \mapsto z^2 - \frac{d^2}{dz^2}, \quad q^2 \mapsto -\frac{i\lambda}{2}\left(z - \frac{d}{dz}\right)^2.$$

En particulier, pour $\lambda = \pm 1$ l'élément qui nous intéresse est envoyé dans l'opérateur $\pm i\left(z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}\right)$. D'où l'on calcule sans difficulté que

$$\left[S_{\pm 1}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} f\right](z) = e^{\pm i\varphi/2} f(ze^{\pm i\varphi}).$$

Par conséquent, l'opérateur identique s'obtient pour $\varphi = 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ce qui démontre notre assertion.

18.5. Représentations des groupes de matrices triangulaires. Notons $T(n, \mathbf{R})$ le groupe de toutes les matrices réelles triangulaires non dégénérées d'ordre n dont tous les éléments situés en dessous de la diagonale principale sont nuls, et les éléments de la diagonale principale sont positifs. L'algèbre de Lie correspondante $\mathfrak{t}(n, \mathbf{R})$ se compose de toutes les matrices triangulaires.

P r o b l è m e 1. Démontrer que le groupe $T(n, \mathbf{R})$ est résoluble et exponentiel, c'est-à-dire que l'application

$$\exp : \mathfrak{t}(n, \mathbf{R}) \to T(n, \mathbf{R})$$

est un homéomorphisme.

Ainsi, on peut appliquer au groupe $T(n, \mathbf{R})$ le théorème de **15.3** sur la bijection entre les représentations unitaires irréductibles et les orbites dans la K-représentation.

Donnons ici une description de toutes les orbites de dimension maximale et la construction des représentations correspondantes.

Utilisons la méthode signalée dans **15.1**. Réalisons l'espace $\mathfrak{t}(n, \mathbf{R})^*$ sous forme de matrices triangulaires inférieures et définissons la K-représentation par la formule

$$K(g) : F \mapsto (gFg^{-1})_{\text{inf}}, \qquad (1)$$

où l'indice « inf » signifie que nous ne considérons que la partie triangulaire inférieure de la matrice obtenue et que tous les éléments situés au-dessus de la diagonale sont remplacés par des zéros.

La structure de l'orbite dans la K-représentation diffère quelque peu selon la parité de n.

Considérons, par exemple, le cas $n = 2k$. Il est commode d'écrire la matrice $g \in T(2k, \mathbf{R})$ sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ou $A, B \in T(k, \mathbf{R})$, $C \in \mathrm{Mat}_k = (\mathbf{R})$ et l'élément $F \in \mathrm{t}(2k, \mathbf{R})^*$ est de la forme

$$F = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}, \tag{3}$$

où $X, Y \in \mathrm{t}(k, \mathbf{R})^*$, $Z \in \mathrm{Mat}(k, \mathbf{R})$.

Dans ces notations la K-représentation s'écrira

$$K(A, B, C): (X, Y, Z) \mapsto$$
$$\mapsto ([(AXA^{-1} + CZA^{-1})]_{\mathrm{inf}}, [B(Y - ZA^{-1}C)B^{-1}]_{\mathrm{inf}}, BZA^{-1}). \tag{4}$$

Examinons d'abord ce que l'on peut obtenir par les transformations (4) pour la matrice Z.

Soient J la matrice composée d'unités sur la deuxième diagonale et de zéros aux autres endroits et J_ε la matrice obtenue à partir de J en remplaçant quelques 1 par -1.

L e m m e. *Presque chaque matrice* $Z \in \mathrm{Mat}_k(\mathbf{R})$ (*sauf une sous-variété de plus petite dimension*) *se met sous la forme* $Z = BJ_\varepsilon A^{-1}$ *où* $A, B \in T(k, \mathbf{R})$.

Pour démontrer cette assertion, on peut considérer l'équation matricielle linéaire $ZA = BJ_\varepsilon$ aux inconnues A et B et voir ensuite si elle possède des solutions.

On peut utiliser aussi les considérations géométriques suivantes. Examinons ce que l'on appelle *variété des drapeaux orientés* X.

Un point de cet espace est la famille des espaces orientés $V_1 \subset \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{k-1} \subset V_k = \mathbf{R}^k$ tels que $\dim V_k = k$.

Le terme « variété des drapeaux » provient du fait que pour le cas $k = 3$, il est naturel de s'imaginer un couple $V_1 \subset V_2$ comme une pièce d'étoffe attachée à une hampe.

P r o b l è m e 2. Vérifier que le groupe $GL(k, \mathbf{R})$ agit transitivement sur X et que le sous-groupe stationnaire d'un certain point est $T(k, \mathbf{R})$.

I n d i c a t i o n. Soit $x_0 \in X$ le drapeau $\mathbf{R}_1^1 \subset \mathbf{R}_2^2 \subset \ldots \subset \mathbf{R}_k$ avec les orientations standard. Si $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_k$ est un autre drapeau quelconque x, on peut choisir une base $e_1, \ldots, e_k$ dans $\mathbf{R}_k$ de sorte que $e_1, \ldots, e_j$ soit une base positivement orientée de V_j pour tous les j de 1 à k. Alors la transformation qui envoie $e_1, \ldots, e_k$ dans la base standard envoie x dans x_0.

L'espace $Y = T(k, R) \backslash GL(k, R)/T(k, R)$, comme nous savons d'après **2.2**, s'identifie avec l'ensemble des orbites dans l'espace des couples de drapeaux. L'assertion ci-dessus équivaut au fait suivant: l'espace contient un sous-ensemble ouvert partout dense composé de 2^k points qui correspondent aux matrices J_ε.

Problème 3. Démontrer que l'espace Y est fini et se compose de $2^k \cdot k\,!$ points.

Indication. Pour éléments présentatifs des classes d'équivalence bilatères on peut prendre les matrices de permutation des éléments de base et les matrices qui s'obtiennent de ces dernières en remplaçant quelques 1 par —1.

Revenons maintenant à l'étude des orbites. En choisissant la transformation (4) d'une manière convenable, nous pouvons mettre la matrice Z sous la forme J_ε. Les transformations ultérieures seront toujours faites de manière à ne pas modifier cette forme.

Problème 4. Démontrer que si $A, B \in T(k, \mathrm{R})$ et $AJ_\varepsilon B^{-1} = J_\varepsilon$, alors A et B sont des matrices diagonales qui s'obtiennent l'une de l'autre par symétrie par rapport à la deuxième diagonale.

Indication. Si A est une matrice triangulaire supérieure, $J_\varepsilon A J_\varepsilon^{-1}$ est une matrice inférieure.

Ensuite, en considérant la transformation (4) pour $A = B = 1_k$ et $Z = J_\varepsilon$, il est aisé de voir que par un choix approprié de la matrice C on peut transformer Y en une matrice nulle et X en une matrice diagonale.

Nous avons donc mis l'élément F sous forme canonique:

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ J_\varepsilon & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Problème 5. Démontrer que des éléments de forme canonique différente appartiennent à des orbites différentes.

Indication. Démontrer que la transformation de la forme (4), qui envoie un élément canonique dans un autre élément canonique, possède les propriétés suivantes $C = 0$, A et B sont diagonales.

Par conséquent, les orbites des éléments canoniques sont indexées par k nombres réels et par l'indice ε.

On peut vérifier (voir l'indication au problème 4) que les sous-groupes stationnaires des éléments canoniques sont de la forme $g(A, JAJ^{-1}, 0)$, où A est une matrice diagonale.

Par conséquent, les orbites correspondantes sont de dimension $k(2k + 1) - k = 2k^2$. Nous ne démontrerons pas ici (quoique nous aurions pu le faire) que l'on obtient ainsi toutes les orbites de dimension $2k^2$ et que toutes les autres orbites sont de plus petite dimension.

Pour sous-algèbre admissible par rapport à la forme canonique $F(5)$ on peut prendre l'algèbre $\mathfrak{h}$ des matrices de la forme $g(A, JAJ^{-1}, C)$, où A est une matrice diagonale. Le sous-groupe correspondant se compose de matrices de la même forme avec des éléments positifs sur la diagonale. Posons

$$\chi_{D,\varepsilon}(g(A, JAJ^{-1}, C)) = e^{2\pi i \operatorname{tr} J_\varepsilon C} \prod_{i=1}^{k} a_j^{2\pi i d_j}$$

et

$$T_{D,\varepsilon} = \operatorname{Ind}(T(n, \mathbf{R}), H, \chi_{D,\varepsilon}).$$

C'est précisément la série principale des représentations du groupe $T(n, \mathbf{R})$.

Il serait intéressant de trouver directement les paramètres D, ε d'après la représentation T qui correspond à ces paramètres.

Il se trouve que les éléments d de la matrice D peuvent être exprimés à l'aide du caractère infinitésimal généralisé de la représentation T (voir **11.3**). Le paramètre ε peut probablement être obtenu d'après le spectre de certains opérateurs, correspondant aux éléments de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie du groupe $T(2k, \mathbf{R})$.

Le calcul direct des caractères de la représentation $T_{D,\varepsilon}$ comme fonctions généralisées sur le groupe peut servir au lecteur d'exercice fort utile. Pour le calcul concernant le sous-groupe $T_0(n, R)$ des matrices triangulaires dont la diagonale est formée d'unités voir [102].

§ 19. EXEMPLES DE GROUPES DE LIE SAUVAGES

L'exemple le plus simple d'un groupe qui n'appartient pas au type I peut être construit de la manière suivante. Soit α un nombre réel irrationnel. Considérons le groupe G des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z \\ 0 & e^{i\alpha t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},\ z,\ w \in \mathbf{C}. \tag{1}$$

Il est clair que c'est un groupe de Lie. Comme espace topologique, G est homéomorphe à $\mathbf{R}^5$. En tant que groupe, c'est le produit semi-direct d'un sous-groupe de dimension 1 $z = w = 0$ et du sous-groupe invariant commutatif de dimension 4, $t = 0$.

Considérons la K-représentation de ce groupe. Identifiant l'espace $\mathfrak{g}$ avec l'espace des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} i\tau & 0 & 0 \\ 0 & i\alpha\tau & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbf{R},\ a,\ b \in \mathbf{C}, \tag{2}$$

nous obtenons l'expression explicite suivante de l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$:

$$K(t, z, w): (a, b, \tau) \to (ae^{-it}, be^{-i\alpha t}, \tau + \mathrm{Im}(az + bw)).$$

Ainsi, les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ sont des cylindres de dimension 2 engendrés par une droite parallèle à l'axe τ se déplaçant sur la courbe donnée par les équations paramétriques

$$a = a_0 e^{it}, \quad b = b_0 e^{i\alpha t}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Il est clair que cette courbe est partout dense dans la surface du tore

$$|a| = |a_0|, \quad |b| = |b_0|.$$

La décomposition de $\mathfrak{g}^*$ en G-orbites ne satisfait pas aux conditions de **9.1** et l'espace quotient $\mathcal{O}(G)$ correspondant n'est pas semi-séparé.

P r o b l è m e 1. Démontrer qu'il existe sur le groupe G une mesure invariante bilatère qui s'écrit dans les paramètres t, $x = z + iy$, $w = u + iv$ sous la forme

$$dg = dt\, dx\, dy\, du\, dv.$$

Considérons la représentation régulière T du groupe G. Elle agit dans $L^2(G, dg)$ par translations à droite et s'écrit, dans les coordonnées t, z, w, suivant la formule

$$[T(\tau, \xi, \eta) f](t, z, w) = f(t + \tau, z + e^{it}\xi, w + e^{i\alpha t}\eta). \tag{4}$$

Nous montrerons maintenant que cette représentation se décompose de deux manières différentes en composantes irréductibles.

P r e m i e r p r o c é d é. Effectuons une transformation de Fourier par rapport aux variables z et w:

$$\tilde{f}(t, a, b) = \int\int\int\int f(t, z, w)\, e^{i\,\mathrm{Re}\,(a\bar{z} + b\bar{w})}\, dx\, dy\, du\, dv. \tag{5}$$

P r o b l è m e 2. Vérifier que la transformation de Fourier envoie la représentation T dans la représentation T_1, donnée par la formule

$$[T_1(\tau, \xi, \eta)\tilde{f}](t, a, b) = e^{i\,\mathrm{Re}\,(e^{it}a\bar{\xi} + e^{i\alpha t}b\bar{\eta})}\tilde{f}(t + \tau, a, b). \tag{6}$$

La formule (6) montre que T_1 est la somme continue des représentations $U_{a, b}$, a, $b \in \mathbf{C}$ qui agissent dans $L^2(\mathbf{R}, dt)$ suivant la formule

$$[U_{a, b}(\tau, \xi, \eta)\varphi](t) = e^{i\,\mathrm{Re}\,(e^{it}a\bar{\xi} + e^{i\alpha t}b\bar{\eta})}\varphi(t + \tau). \tag{7}$$

P r o b l è m e 3. Démontrer que toutes les représentations $U_{a, b}$ sont irréductibles pour $a \neq 0$, $b \neq 0$.

I n d i c a t i o n. Vérifier que chaque opérateur permutable aux opérateurs de $U_{a, b}(0, \xi, \eta)$ est un opérateur de multiplication par une fonction.

Problème 4. Démontrer que les représentations $U_{a,\,b}$ et $U_{a_1,\,b_1}$ sont équivalentes si et seulement s'il existe un nombre réel τ tel que $a_1 = ae^{i\tau}$, $b_1 = be^{i\alpha\tau}$.

Indication. Vérifier que l'opérateur d'entrelacement pour $U_{a_1,\,b_1}$ et $U_{a,\,b}$ ne peut être que l'opérateur de translation par τ.

Deuxième procédé. Effectuons un changement de variables:

$$f(t,\, z,\, w) = \varphi(t,\, e^{-it}z,\, e^{-i\alpha t}w)$$

et passons à la transformation de Fourier:

$$\tilde{\varphi}(s,\, a,\, b) = \int\int\int\int\int \varphi(t,\, z,\, w)\, e^{i\,\mathrm{Re}\,(ts+a\bar{z}+b\bar{w})}\, dt\, dx\, dy\, du\, dv. \quad (8)$$

Problème 5. Vérifier qu'après une telle transformation, la représentation T deviendra la représentation T_2 donnée par la formule:

$$[T_2(\tau,\, \xi,\, \eta)\,\tilde{\varphi}]\,(s,\, a,\, b) = e^{i\,\mathrm{Re}\,(\tau s+e^{i\tau}a\bar{\xi}+e^{i\alpha\tau}b\bar{\eta})}\,\tilde{\varphi}(s,\, e^{i\tau}a,\, e^{i\alpha\tau}b). \quad (9)$$

Indication. Il est utile de considérer séparément les transformations $T_2(0,\, \xi,\, \eta)$ et $T_2(\tau,\, 0,\, 0)$.

Soit $X_{\tau,\,\rho}$ une surface de dimension 2 dans $\mathbf{C}^2$ définie par les équations $|a| = r$, $|b| = \rho$, où r et ρ sont des nombres réels non négatifs.

La représentation T_2 se décompose naturellement en une somme continue des représentations $V_{\tau,\,\rho,\,s}$ qui agissent dans $L^2(X_{\tau,\,\rho})$ suivant la formule

$$[V_{\tau,\,\rho,\,s}(\tau,\, \xi,\, \eta)\,\varphi]\,(a,\, b) = e^{i\,\mathrm{Re}\,(\tau s+e^{i\tau}a\bar{\xi}+e^{i\alpha\tau}b\bar{\eta})}\varphi(e^{i\tau}a,\, e^{i\alpha\tau}b). \quad (10)$$

Problème 6. Démontrer que les représentations $V_{\tau,\,\rho,\,s}$ sont irréductibles, quels que soient τ, ρ et s.

Indication. Utiliser le fait que chaque fonction mesurable sur $X_{\tau,\,\rho}$ et invariante par rapport à $V_{\tau,\,\rho,\,s}(\tau,\, 0,\, 0)$ est constante.

Problème 7. Démontrer que les représentations $V_{\tau,\,\rho,\,s}$ et $X_{\tau,\,\rho,\,s}$ sont équivalentes si et seulement si la différence $s - s'$ se met sous la forme $m + \alpha n$, $m,\, n \in \mathbf{Z}$.

Indication. L'opérateur d'entrelacement est l'opérateur de multiplication par la fonction de la forme $a^m b^n$.

Problème 8. Démontrer qu'aucune des représentations $U_{a,\,b}$ n'est équivalente à aucune des représentations $V_{\tau,\,\rho,\,s}$.

Indication. Comparer l'opérateur de la restriction de ces représentations au sous-groupe $t = 0$.

Ainsi, les deux décompositions construites ci-dessus sont essentiellement différentes. Le groupe G n'appartient donc pas au type I.

Un exemple plus délicat de groupe de Lie n'appartenant pas au type I, dans lequel la deuxième condition du critère de Kostant-

Auslander (voir **15.3**, théorème 3) n'est pas remplie, peut être construit de la manière suivante.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de dimension 7 sur **R** à base X, Y, U, V, S, T, R et aux commutateurs non nuls suivants:

$$\begin{matrix} [S, X] = Y, & [S, Y] = -X, \\ [T, U] = V, & [T, V] = -U. \end{matrix} \quad [S, T] = R,$$

Cette algèbre peut être réalisée par des matrices « bloc-diagonales » d'ordre 6 dont les blocs sur la diagonale sont de la forme

$$\begin{pmatrix} is & 0 & z \\ 0 & it & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & s & r \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $z = x + iy$, $w = u + iv$ et x, y, s, t, u, v, r sont des paramètres réels (les coordonnées par rapport à la base X, Y, S, T, U, Y, R).

Soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant à l'algèbre $\mathfrak{g}$.

P r o b l è m e 9. Démontrer que les orbites Ω de dimension maximale dans $\mathfrak{g}^*$ par rapport à G sont topologiquement équivalentes à $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$ et que la classe de cohomologie définie par la forme canonique B_Ω est non nulle.

I n d i c a t i o n. En considérant X, Y, S, T, U, V, R comme fonctions linéaires sur $\mathfrak{g}^*$, démontrer que les équations

$$X^2 + Y^2 = r_1^2, \quad U^2 + V^2 = r_2^2, \quad R = r_3$$

pour $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $r_3 \neq 0$ déterminent une orbite sur laquelle

$$B_\Omega = d\varphi \wedge dS + d\psi \wedge dT + R d\varphi \wedge d\psi,$$

où φ et ψ sont des paramètres sur Ω définis à partir des égalités $X = r_1 \cos \varphi$, $Y = r_1 \sin \varphi$, $U = r_2 \cos \psi$, $V = r_2 \sin \psi$.

Le fait que le groupe G n'appartient pas au type I peut être établi de la manière suivante. G possède un sous-groupe invariant commutatif dont l'algèbre de Lie est l'enveloppe des vecteurs X, Y, U, V. En appliquant à ce cas les raisonnements des numéros **13.3** et **14.1**, il est aisé de montrer que l'étude des représentations du groupe G équivaut à étudier les représentations du groupe G_0 des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & m & r \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m,\ n \in \mathbf{Z},\ r \in \mathbf{R}.$$

P r o b l è m e 10. Démontrer que le groupe G_0 n'est pas de type I.

I n d i c a t i o n. Soit H le sous-groupe de G_0 déterminé par la condition $m = 0$. Définissons pour les nombres réels quelconques λ et φ le caractère $\chi_{\lambda, \varphi}$ du groupe H en posant:

$$[\chi_{\lambda, \varphi}(n, r) = e^{i(\lambda r + n\varphi)}.$$

Démontrer que les représentations $T_{\lambda,\varphi} = \operatorname{Ind}(G_0, H, \chi_{\lambda,\varphi})$ sont irréductibles et $T_{\lambda,\varphi} \sim T_{\lambda_1,\varphi_1}$ si et seulement si $\lambda = \lambda_1$ et $\varphi - \varphi_1$ se met sous la forme $2\pi k + \lambda l$, où k et l sont des entiers quelconques.

En déduire que si λ et π ne sont pas commensurables, les classes d'équivalence des représentations $T_{\lambda,\varphi}$ et T_{λ,φ^1} ne sont pas séparées par aucun sous-ensemble ouvert de $\hat{G}$.

Il serait très intéressant d'appliquer la méthode des orbites à l'étude des représentations des groupes de Lie sauvages. Ainsi, il semble probable que le rôle des orbites revient aux mesures ergodiques G-invariantes dans $\mathfrak{g}^*$ et la formule (Φ) exprime la trace relative de l'opérateur de représentation dans le sens de von Neumann. Il est également possible que l'on peut décrire la décomposition d'une représentation régulière en facteur en terme d'orbites et donner une formule explicite pour la mesure de Plancherel généralisée dans le sens de I. Segal (voir **12.4**) [1]).

---

[1]) Ce numéro étant déjà terminé, l'auteur a obtenu un tiré à part d'un article intéressant de L. Pukanski, où une partie de ce programme est réalisée.

NOTE HISTORIQUE ET INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

La théorie des représentations des groupes existe en tant que branche indépendante des mathématiques depuis près de 80 années.

La première période de son développement (qui se rapporte approximativement aux années 1890-1920) est liée aux noms de G. Frobenius et I. Shur, B. Burnside et F. Molina. Dans les travaux de cette période, on ne considérait que les groupes finis et leurs représentations de dimension finie.

La première impulsion pour la création de la théorie des représentations fut la généralisation de la notion de caractère trouvée par Frobenius d'après une suggestion de Dedekind. En s'exprimant en langage plus moderne, on peut dire que le caractère dans le sens de Frobenius est une forme multiplicative sur le centre de l'anneau de groupe. Il fut bientôt remarqué que ce caractère peut se définir également comme trace d'une représentation matricielle. Ainsi, la théorie de Frobenius et la théorie antérieure des caractères des groupes commutatifs s'intégrèrent à une nouvelle théorie unique — la théorie des représentations.

Une réalisation marquante fut l'emploi systématique par I. Shur de l'opération de moyenne et la démonstration de son célèbre lemme sur les opérateurs d'entrelacement des représentations irréductibles. Burnside trouva la forme générale des relations d'orthogonalité et élucida la structure des algèbres matricielles irréductibles. Ce résultat, de même que le théorème de F. Molina sur la semi-simplicité de l'algèbre de groupe, lièrent la théorie des représentations des groupes finis à la théorie des algèbres de dimension finie. Dans un des travaux de Shur, la théorie des représentations projectives des groupes finis fut alors construite.

En outre des résultats généraux ci-dessus, la première période fut caractérisée par l'accumulation d'un grand nombre de faits concrets sur les représentations de groupes concrets ou de certaines classes spéciales de groupes.

La deuxième période est celle de la création de la théorie des représentations des groupes topologiques compacts. Les résultats généraux les plus importants de cette période sont le théorème de Haar-von Neumann sur l'existence d'une mesure finie invariante et le théorème de F. Peter-H. Weyl affirmant que le système des représentations de dimension finie est complet. En même temps, H. Weyl et E. Cartan édifièrent la théorie des représentations de dimension finie des groupes de Lie semi-simples. Ces résultats étaient non seulement remarquables par leur beauté intrinsèque, mais trouvèrent aussi de larges applications dans différents domaines des mathématiques et de la physique (théorie des espaces symétriques, théorie des moments en mécanique quantique). La théorie des représentations de groupes devient ainsi une science appliquée dont la popularité va croissant.

La nécessité de considérer les groupes non compacts et leurs représentations de dimension infinie se ressentit bientôt. Ainsi, le célèbre théorème de Stone-von Neumann sur l'unicité de l'opérateur de Schrödinger est au fond la classification des représentations unitaires de dimension infinie du groupe nilpotent le plus simple (appelé groupe de Heisenberg). E. Wigner [136] fit la première tentative d'édifier la théorie des particules élémentaires en prenant pour point de départ la théorie des représentations de dimension infinie.

L'étude systématique des représentations de dimension infinie des groupes, trait essentiel de la troisième période, commence dans les années quarante. Il y a toute raison de rapporter le début de cette période à la parution du travail de I. M. Gelfand et D. A. Raikov (1943), où les auteurs ont réussi à démontrer que le système des représentations unitaires irréductibles des groupes localement compacts est complet. A cette même époque Murray et von Neumann ont mis fin à leurs recherches fondamentales sur les algèbres d'opérateurs [122]. La théorie des algèbres de von Neumann rejoint la théorie des représentations de groupes dans les travaux de G. M. Adelson-Velski [1], F. Mautner [116], [117], R. Godement [87], [88].

Les premiers théorèmes de classification pour les représentations de dimension infinie furent obtenus en 1947 par I. M. Gelfand et M. A. Naimark [83], [84] et V. Bargmann [61]. En 1950 I. M. Gelfand et M. A. Naimark ont publié le livre [22] contenant la description des représentations de dimension infinie des groupes $SL(n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$ et $Sp(n, \mathbf{C})$ pour n quelconque.

Ce travail fut largement reconnu et fit naître tout un fleuve, sans cesse croissant, de travaux sur la théorie des représentations de dimension infinie.

Nous suivrons ici quelques confluents de ce fleuve.

T h é o r i e g é n é r a l e. Un des résultats principaux revint à dégager la définition de la notion de groupe que l'on appelle ici apprivoisé. L'équivalence des diverses définitions de cette classe fut démontrée pendant ces 10-15 dernières années. Les principaux résultats sont dus à G. Mackey, J. Fell, J. Dixmier et J. Glimm. Le livre de J. Dixmier [15] dresse le bilan de ce travail.

Harish-Chandra démontra dans [91] que tous les groupes semi-simples sont apprivoisés. Une démonstration plus belle et simple fut trouvée par R. Godement [89]. Dans [133], E. Takenoushi établit que tous les groupes exponentiaux sont apprivoisés. Le premier exemple d'un groupe de Lie sauvage est probablement à attribuer à F. Mautner (non publié). Plus tard, cet exemple fut redécouvert à plusieurs reprises. Un critère d'apprivoisité des groupes de Lie résolubles fut trouvé par L. Auslander et B. Kostant [60].

Pour les groupes de Lie généraux, un tel critère n'est pas encore découvert.

R e p r é s e n t a t i o n s i n d u i t e s. La théorie de la dualité de Frobenius fut transposée aux groupes compacts par A. Weyl [56].

E. Wigner [136], I. M. Gelfand et M. A. Naimark [83], [84] avaient déjà mentionné dans leurs travaux que la construction qu'ils ont mise au point est la généralisation de la notion de représentation induite. L'étude systématique de cette construction pour les groupes localement compacts fut entreprise par G. Mackey. Un de ses résultats principaux obtenus [113] est le critère d'inductibilité.

En utilisant ce critère, Mackey établit un algorithme fort simple pour construire et étudier les représentations unitaires des extensions de groupes [114].

La notion de représentation induite holomorphe fut d'abord implicitement étudiée par Bargmann dans [61] et explicitement introduite par I. M. Gelfand et M. I. Graev dans [80]. L'étude systématique des représentations induites et induites holomorphes fut entreprise par R. Blattner [66] qui introduisit également la notion de représentation partiellement holomorphe et trouva une démonstration plus simple du critère de Mackey.

R. Bott a obtenu [67] une réalisation des représentations irréductibles (de dimension finie) d'un groupe de Lie compact semi-simple G dans les espaces de cohomologie du faisceau des germes des sections holomorphes de certaines G-fibrations à fibres de dimension 1. R. P. Langlands énonça dans [112] l'hypothèse qu'une construction analogue (où les cohomologies usuelles seraient remplacées par les cohomologies dites L^2-cohomologies) est applicable à la construction des représentations des groupes semi-simples non compacts. Pour une description plus détaillée de cette construction voir, par exemple, [107]. Une autre généralisation de la notion de représentations induites fut, enfin, proposée par G. Mackey. Elle a pour point de départ l'idée de retrouver le critère d'inductibilité pour le cas des G-espaces ergodiques non homogènes. Pour plus de

détails, sur cette généralisation et la notion de sous-groupe virtuel voir l'article de revue de G. Mackey [115]. D'autres résultats ultérieurs ont été obtenus dans [95].

Tout un nombre de travaux se rapportent aux diverses généralisations de la dualité de Frobenius aux groupes non compacts (voir, par exemple, [115]). Les espaces quotients compacts se sont avérés les plus commodes pour effectuer de telles généralisations. Dans cet ordre d'idées un théorème important fut obtenu par I. M. Gelfand et I. I. Piatetski-Shapiro pour un groupe de Lie G semi-simple et son sous-groupe discret Γ. L'intérêt suscité par ce cas est dicté par le fait que le théorème de dualité pour un couple (G, Γ) et la formule de la trace qui en découle permettent d'appliquer la théorie des représentations à certains problèmes difficiles de la théorie des nombres moderne. Pour plus de détails sur ce groupe de questions voir [20].

Le théorème général de dualité pour le cas d'un espace quotient compact fut obtenu par G. I. Olchanski dans [124].

Une tentative d'intérêt particulier pour conserver la théorie de Frobenius en sacrifiant l'unitarité de la représentation fut entreprise par C. Moore dans [118].

R e p r é s e n t a t i o n s d e s g r o u p e s d e L i e s e m i - s i m p l e s . Les propriétés fondamentales de la théorie des représentations de dimension infinie des groupes complexes semi-simples furent élucidées dans le livre [22]. On y apprend en particulier qu'un rôle fondamental dans cette théorie revient aux sous-groupes dits paraboliques. (Un sous-groupe P d'un groupe G complexe semi-simple s'appelle parabolique, s'il est un sous-groupe connexe complexe possédant l'une des deux propriétés équivalentes: 1) l'espace quotient G/P est compact, 2) P contient le sous-groupe résoluble maximal de G.) M. A. Naimark et D. P. Jelobenko ont démontré [120], [97] que toutes les représentations irréductibles (y compris les représentations non unitaires) d'un groupe complexe semi-simple G sont contenues dans l'ensemble de ses représentations élémentaires (c'est-à-dire des représentations induites des représentations de dimension 1 du sous-groupe parabolique). L'étude de la catégorie des représentations élémentaires est considérablement simplifiée par le fait que les espaces des classes d'équivalence doubles $P_1 \diagdown G/P_2$ sont finis pour tout couple de sous-groupes paraboliques P_1 et P_2. En particulier, lorsque P_1 et P_2 coïncident avec le sous-groupe de Borel B (c'est-à-dire le sous-groupe résoluble maximal de G), les points de cet espace s'identifient aux éléments du groupe de Weyl W du groupe G [1]). Le livre [22] expose le calcul des caractères des représentations élémentaires et la formule de Plancherel pour les groupes classiques complexes. On y établit également que les groupes semi-simples possèdent des séries de représentations supplémentaires n'appartenant pas à l'adhérence d'une représentation régulière.

Ces résultats furent généralisés au cas des groupes complexes semi-simples dans les travaux de Harish-Chandra [91], [92].

La classification des représentations irréductibles dans les espaces de Banach fut obtenue grâce à l'étude des opérateurs de Laplace sur les groupes de Lie semi-simples par F. A. Beresine dans [63]. Il est à noter que le problème de la recherche, dans la classe construite, des représentations unitaires s'est avéré fort difficile du point de vue technique. Le problème plus simple de l'existence d'une forme hermitienne G-invariante admet une solution simple en termes de caractères induits du sous-groupe parabolique. Mais on ne sait pas encore quand est-ce que cette forme est positive (voir [90], [131]).

Dans la théorie des représentations des groupes semi-simples réels on se

---

[1]) Ce résultat important fut établi par Gelfand et Naimark pour les groupes complexes classiques par Harish-Chandra et Chevalley pour le cas général. Après la parution du travail [68], où ce résultat a permis d'étudier les opérateurs d'entrelacement, il a pris le nom de « Lemme de Bruhat ».

heurte à des difficultés supplémentaires. Dans ce cas, l'étude des représentations élémentaires même en faisant appel à la notion de représentation induite holomorphe s'avère insuffisante pour construire un système complet. La première série de représentations non élémentaires obtenue par I. M. Gelfand et M. I. Graev pour le groupe $SU(2, 1)$ fut appelée série « étrange ». Ce n'est qu'après l'apparition de l'hypothèse de Langlands qu'il devint clair que cette série se réalise naturellement non pas dans les fonctions (c'est-à-dire dans les cohomologies de dimension zéro), mais dans les cohomologies de dimensions supérieures.

Des résultats fort importants pour la théorie des représentations des groupes de Lie réels semi-simples furent obtenus par Harish-Chandra dont le travail [94], faisant le bilan de toute une série de recherches, donne la classification complète des séries dites discrètes (c'est-à-dire des représentations des éléments matriciaux de carré intégrable).

Les dernières réalisations concernant la démonstration de l'hypothèse de Langlands appartiennent à W. Schmid [128], K. Okamoto et M. S. Narasimhan [121] et R. Parthasarathy [125].

La théorie des représentations de dimension infinie des groupes semi-simples engendra de nouvelles réalisations d'importance particulière dans les questions classiques de la théorie de dimension finie.

I. M. Gelfand et M. L. Zetlin découvrirent des formules explicites pour les représentations de dimension finie du groupe linéaire et orthogonal (voir le supplément au livre [21]).

Les résultats de D. P. Jelobenko dans [96] donnent l'espoir d'obtenir des formules analogues pour le cas du groupe simplectique.

Les méthodes de la théorie des représentations de dimension infinie se sont également avérées utiles pour la théorie des représentations des groupes algébriques sur les corps finis (voir [132], [85]).

L a m é t h o d e d e s o r b i t e s. Cette méthode fit son apparition dans le travail de l'auteur [102] consacré aux représentations des groupes de Lie nilpotents où l'on a aussi signalé la possibilité de généraliser cette méthode à d'autres classes de groupes. Le développement ultérieur fut obtenu dans les travaux de P. Bernat [65], B. Kostant [109], [110], L. Auslander et B. Kostant [60], L. Pukanszky [126], [127], M. Duflo [73], [75] et de l'auteur [103], [104], [106]. La méthode des orbites s'est également avérée utile pour étudier certains autres problèmes de la théorie des représentations des algèbres de Lie (voir [72], [73]), les corps des quotients des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie (voir [82]), le centre de l'algèbre enveloppante (voir [78] et [75]).

La liaison entre la méthode des orbites et la mécanique fut remarquée par B. Kostant [109]. La classification des variétés simplectiques homogènes fut indépendamment obtenue, il y a environ 5 ans, par B. Kostant, J. M. Souriau et l'auteur. Pour l'exposé de cette classification voir [110], [52], [108].

La troisième période du développement de la théorie des représentations est aujourd'hui terminée dans le plan des idées (quoique de nombreux problèmes concrets difficiles attendent toujours leur solution). Néanmoins, la théorie des représentations ne peut être considérée comme une branche des mathématiques absolument achevée. Dès maintenant, on peut tracer les directions qu'elle suivra, sans doute, dans la période suivante de son développement — la quatrième période.

C'est tout d'abord la théorie des représentations de dimension infinie des groupes que l'on rencontre dans la théorie des nombres moderne et en géométrie algébrique : les groupes algébriques sur les corps locaux ou sur les anneaux d'adèles. Le livre [20] peut servir d'introduction à ce domaine, de même que l'exposé par R. Godement du travail célèbre de H. Jacket et R. P. Langlands sur les formes automorphes sur $GL(2)$.

Deuxièmement, c'est la théorie des représentations des groupes de Lie de dimension infinie. On peut signaler au moins trois types de tels groupes, dont l'étude présente un intérêt particulier et possède de nombreuses applications.

1. Groupe d'opérateurs invertibles dans les espaces vectoriels de dimension infinie (par exemple, le groupe **U** (H) de tous les opérateurs unitaires dans un espace hilbertien H, ou son sous-groupe $\mathbf{u}_0$ (H) formé des opérateurs congrus aux opérateurs unité modulo un opérateur compact).

2. Le groupe des difféomorphismes des variétés différentiables (le groupe de transformations canoniques des variétés simplectiques, par exemple).

3. Les produits continus des groupes de Lie de dimension finie, c'est-à-dire les groupes C^∞ (M, G) des fonctions différentiables sur la variété M à valeurs dans le groupe de Lie G.

De toute apparence une place de choix revient à la méthode des orbites dans ces nouvelles branches de la théorie des représentations.

On a démontré en particulier que seuls les groupes réels semi-simples contenant un sous-groupe de Cartan compact possèdent des séries discrètes de représentations.

Néanmoins, les représentations des séries discrètes ne sont décrites dans les travaux de Harish-Chandra que d'une façon indirecte. A savoir, on n'y signale que la restriction du caractère de la représentation sur la partie régulière du sous-groupe de Cartan compact et l'on démontre qu'il existe une seule représentation (à équivalence près) possédant un caractère à cette propriété.

Un problème très intéressant non résolu consiste à trouver la réalisation explicite des représentations de la série discrète. La construction mentionnée plus haut des représentations dans les L^2-cohomologies, proposée par Langlands, ouvre de larges perspectives pour aborder ce problème.

BIBLIOGRAPHIE

a) Manuels et monographies

[1] Adelson-Velski G. M., Analyse spectrale de l'anneau des opérateurs linéaires bornés (en russe), thèse, Université de Moscou, 1948.

[2] Atiyah M. F., K-theory (Lecture notes by D. W. Anderson), Hariard University Cambridge Mass, 1965.

[3] Bogolioubov N. N., Cours sur la théorie de la symétrie des particules élémentaires (en russe), Editions de l'Université de Moscou, 1966.

[4] Borévitch Z. I., Chafarévitch I. R., Théoric des nombres (en russe), Editions « Naouka », Moscou, 1964.

[5] Bourbaki N., Topologie générale, Hermann, Paris, 1961.

[6] Bourbaki N., Algèbre (I, II, III), Hermann, Paris, 1961.

[7] Bourbaki N., Intégration, Hermann, Paris, 1959.

[8] Bourbaki N., Théories spectrales, Hermann, Paris, 1967.

[9] Cartan A., Eilenberg S., Homology algebra.

[10] Chevalley C., Theory of Lie groups (I, II, III), Hermann, Paris, 1955.

[11] Chilov G. E., Analyse mathématique, cours spécial (en russe), Editions « Phyzmathguiz », Moscou, 1961.

[12] Cohen P. T., Set theory and the continuum hypothesis, W. A. Benjamin, New York, 1966.

[13] Curtis C., Reiner I., The theory of representations of finite groups and associative algebras, Interscience, New York, 1962.

[14] Dunford N., Schwartz J. T. Linear operators (I, II), Interscience, New York, 1958, 1963.

[15] Dixmier J., C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villar, Paris, 1969.

[16] Day M. M., Normed linear spaces, Verlag, Berlin, 1958.

[17] Fraankel A., Bar-Hillel I., Foundations of set theory, North Holland, Amsterdam, 1958.

[18] Gelfand I. M., Vilenkine N. Y., Quelques applications de l'analyse harmonique. Espaces hilbertiens. (Fonctions généralisées, fasc. 4). Editions « Phyzmathguiz », Moscou, 1962.

[19] Gelfand I. M., Graev M. I., Vilenkine N. Y., Géométrie intégrale et questions liées de la théorie des représentations. (Fonctions généralisées, fasc. 5). « Phyzmathguiz », Moscou, 1962.

[20] Gelfand I. M., Graev M. I., Piatetski-Shapiro I. I., Théorie des représentations et fonctions automorphes. (Fonctions généralisées, fasc. 6) (en russe). Editions « Naouka », 1966.

[21] Gelfand I. M., Minlos R. A., Shapiro Z. Y., Représentations du groupe des rotations et du groupe de Lorentz (en russe), Editions « Phyzmathguiz », 1958.

[22] Gelfand I. M., Naimark M. A., Représentations unitaires des groupes classiques (en russe), Travaux de l'Institut Mathématique de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 1950.

[23] Gelfand I. M., Raïkov D. A., Chilov G. E., Anneaux normés commutatifs (en russe), Editions « Phyzmathguiz », 1960.

[24] Gunning R., Rossi H., Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, Engleword Cliffs N. J., 1965.

[25] Godement R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[26] Grothendieck A., Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J., vol. 9, n° 2, 3, 1957.

[27] Groupes arithmétiques et fonctions automorphes (en russe), Editions « Mir », Moscou, 1969.

[28] Halmas P., Mesure theory, New York, 1950.

[29] Hamermesh M., The theory of groups and its applications to physical problems.

[30] Helgason S., Differentiel geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1962.

[31] Hu Sze-Tsen, Homotopy theory, Academie Press, 1959.

[32] Husemoller D. Fibre bundles, Mc Graw Hill, New York, 1966.

[33] Hewitt E., Ross K., Abstract harmonic analysis I, II, Springer Verlag, 1963, 1970.

[34] Jacket H., Langlands R. P., Automorphic forms on *GL* (2), Springer Lectures Notes, 114 (1970).

[35] Jacobson N., The theory of rings., Math surveys, n° 2, 1943.

[36] Jelobenko D. P., Groupes de Lie compacts et leurs représentations (en russe), Editions « Naouka », 1970.

[37] Kaplanski I., Introduction to differentiel algebra, Hermann, Paris 1957.

[38] Kelley J. L., General Topology, Van Norstrend, New York, 1957.

[39] Kokkede Y., Quark theory, Editions « Mir », 1971.

[40] Kolmogorov A. N., Fomine S. V., Eléments de la théorie des fonctions et d'analyse fonctionnelle (traduit du russe), Editions « Mir », 1974.

[41] Lang S., Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965.

[42] Lubarski T. Y., Théorie des groupes et applications à la physique (en russe), « Gostechizdat », Moscou, 1957.

[43] Maclane S., Homology, Springer Verlag, Berlin, 1963.

[44] Naimark M. A., Anneaux normés (en russe), Editions « Naouka », Moscou, 1968.

[45] Phelps P., Lectures on Chocquets theorems, Van Nosrand, Princeton N.I. 1966.

[46] Pontriaguine L. S., Groupes topologiques. Ed. « Mir ».

[47] Serre J.-P., Algèbres de Lie semi-simples complexes, W. A. Benjamin, New York 1966.

[48] Serre J.-P., Lie algebras and Lie groups., W. A. Benjamin, New York, 1965.

[49] Serre J.-P., Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.

[50] Schaefer H. H., Topological vector spaces, Mc Millan, New York, 1966.

[51] Spivak M. Calculus on manifolds, W. A. Benjamin, New York, 1965.

[52] Souriau J.-M., Structure des systèmes dynamiques, Dunod Université, Paris, 1970.

[53] Steenrod N., Eilenberg S., Foundation of algebraic topology, Princeton University Press, 1952.

[54] Théorie des algèbres de Lie, topologie des groupes de Lie (Seminaire « Sophus Lie »), Secrétariat math., Paris, 1955.

[55] Vilenkine N. Y. Fonctions spéciales et théorie des représentations des groupes (en russe), Editions « Naouka », Moscou, 1965.

[56] Weil A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Publ. de l'Institut de Mathématiques de Clermont-Ferrand, Paris, 1940.

[57] Weyl H., The classical groups. Their invariants and representations, New York, 1939.

[58] Whitney H., Geometric Integration theory, Princeton Univ. Press, 1957.

b) Articles de revues

[59] Atiyah M. F., Bott R., A Lefschetz fixed point theorem for elliptic complexes I, Ann. Math., 86, N 2 (1967), 374-407.

[60] Auslander L., Kostant B., Quantization and unitary representations of solvable Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 692-695.

[61] Bargmann V., Irreductible unitary representations of the Lorentz Group, Ann. Math. **48** (1947), 568-640.

[62] Bagmann V., On unitary ray representations of continuous groups, Ann. Math. 59, N 1 (1954), 1-46.

[63] Beresine F. A., Opérateurs de Laplace sur les groupes de Lie semi-simples (en russe). Trudy Mosk. matem. o-va, **6** (1957), 371-463; Lettre à la rédaction, **12** (1963), 453-466.

[64] Beresine F. A., Gelfand I. M., Quelques remarques sur la théorie des fonctions sphériques sur les variétés symétriques (en russe), Trudy Mosk. mathem. o-va, **5** (1966), 311-352.

[65] Bernat P., Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles, Ann. Scient. École Norm. Sup. 82 (1965), 37-99.

[66] Blattner R., On induced representations I, II; Amer. Journ. Math. **83** (1961). n° 1, 79-98, n° 3, 499-512.

[67] Bott R., Homogeneous vector bundles, Ann. Math. **66** (1957), 203-248.

[68] Bruhat F., Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France, **84**, (1956), 97-205.

[69] Bruhat F., Distributions sur un groupe localement compact..., Bull. Soc. Math. France, **19** (1961), 43-75.

[70] Delaroche C., Kirillov A. A., Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés, Séminaire Bourbaki, 1968, Exp. 343, 1-22.

[71] Dixmier J., Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques, Ann. Inst. Fourier **7** (1957), 315-328.

[72] Dixmier J., Sur les représentations induites des algèbres de Lie, J. Math. Pures Appl. **50**, 1 (1971), 1-24.

[73] Duflo M., Caractères des groupes et des algèbres de Lie resolubles, Ann. Scient., École Norm. Sup., 1970, 23-74.

[74] Duflo M., Représentations induites d'algèbres de Lie, C.r. Acad. Sci., Ser. **A272**, 1971, 1157-1158.

[75] Duflo M., Représentations de la série principale des groupes de Lie semi-simples (en russe), Funct. analis, **4**, n° 2 (1970), 38-42.

[76] Ernest J., Hopf-von Neumann algebras, Proc. Conf. Functional analysis, Academic Press, London, 1967, 195-215.

[77] Fell J. M. G., The structure of algebras of operator felds, Acta. Math. **106** (1961), 233-280.

[78] Gelfand I. M., Le centre de l'anneau de groupe infinitésimal (en russe). Math. **26** (1950), 103-112.

[79] G e l f a n d I. M., G r a e v M. I., Géométrie des espaces homogènes, représentations de groupes dans les espaces homogènes et questions de géométrie intégrale I, Trudy Mosc. mathem. o-va, 8 (1959).

[80] G e l f a n d I. M., G r a e v M. I., Représentations unitaires de groupe réel unimodulaire (séries principales non dégénérées (en russe), Izv. Acad. Sci. U.R.S.S., ser. mathem. **17**, 3 (1953), 189-248.

[81] G e l f a n d I. M., K i r i l l o v A. A., Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, Publ. Math. I.H.E.S. **31** (1966), 509-523.

[82] G e l f a n d I. M., K i r i l l o v A. A., Structure du corps de Lie associée à une algèbre de Lie semi-simple décomposable. Funct. Analis, 3, 1 (1968).

[83] G e l f a n d I. M., N a i m a r k M. A., Représentations unitaires du groupe de Lorentz, Izv. Acad. Scien. U.R.S.S., Ser. mathem. **11**, 5 (1947), 411-504.

[84] G e l f a n d I. M., N a i m a r k M. A., Représentations unitaires du groupe des transformations linéaires de la droite, Doklady Acad. Scien. U.R.S.S., 55, 7 (1947).

[85] G e l f a n d I. M., Représentations d'un groupe linéaire complet sur un champ fini, Mathem. S.B. **83**, 1 (1970), 15-41.

[86] G e r o n i m u s A. Y., Topologie de Grothendieck et théorie des représentations, Funct. Analis 5, 3 (1971), 22-31.

[87] G o d e m e n t R., Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 1-84.

[88] G o d e m e n t R., Théorie des caractères, I, Algèbres unitaires, II, Définitions et propriétés générales des caractères, Ann. Math. 59, 1 (1954), 47-85.

[89] G o d e m e n t R., Théorie des fonctions sphériques, I.

[90] G r o s s K. I., The Dual of a parabolic subgroup and a degenerate principal series of *Sp* (*n*, C) Amer. J. Math. **93**, 2 (1971), 398-428.

[91] H a r i s h - C h a n d r a, Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, I, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953).

[92] H a r i s h - C h a n d r a, The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **76**, n° 3, (1954), 485-528.

[93] H a r i s h - C h a n d r a. Invariant eigen-distributions on a semi-simple Lie group. Trans. Amer. Math. Soc, **119**, n° 3, 1965.

[94] H a r i s h - C h a n d r a. Discrete series for semisimples Lie groups, I, II, Acta Math. **113** (1965), 241-318 et **116** (1966).

[95] I s m a g u i l o v R. S., Sur les cycles irréductibles d'un système dynamique. Funct. Analis 3, 3 (1969), 92-93.

[96] J e l o b e n k o D. I., Groupes classiques. Analyse spectrale des représentations de dimension finie. Uspehi Mat. Naouk. **17**, 1 (1962), 27-120.

[97] J e l o b e n k o D. P., N a i m a r k M. A., Description des représentations complètement irréductibles d'un groupe de Lie complexe semi-simple, Izv. Acad. Scien. U.R.S.S., Ser. Matem. **34**, 1 (1970), 57-85.

[98] K a t s G. I., Fonctions généralisées sur un groupe localement compact et décomposition des représentations unitaires, Trudy Mosc. matem. o-va, **10** (1961).

[99] K a t s G. I., Groupes annulaires et principe de dualité, Trudy Mosc. matem. o-va, **12** (1963), 259-301 et **13** (1965), 84-113.

[100] K a t s G. I., Extensions des groupes qui sont annulaires, Mathem. S. B., **76**, 3 (1968), 473-496.

[101] K a t s G. I., Groupes annulaires finis, Trudy Mosc. matem. o-va, **15** (1966), 224-262.

[102] K i r i l l o v A. A., Représentations unitaires de groupes de Lie nilpotents, Uspechi Mat. Naouk., **17**, 4 (1962), 57-101.

[103] K i r i l l o v A. A., Sur la mesure de Plancherel pour les groupes de Lie nilpotents, Funct. Analis. 1, 4 (1967), 84-85.

[104] K i r i l l o v A. A., La méthode des orbites dans la théorie des représentations unitaires des groupes de Lie, Funct. Analis, 2, 1 (1968), 98-100.

[105] K i r i l l o v A. A., Caractères des représentations unitaires des groupes de Lie, Funct. Analis, 2, 2 (1968), 40-55.

[106] K i r i l l o v A. A., Caractères des représentations unitaires des groupes de Lie (théorèmes de réduction), Funct. Analis, 3, 1 (1969), 36-47.

[107] K i r i l l o v A. A., Construction de représentations unitaires irréductibles de groupes de Lie, Vestnik Mosc. Univ. (1970), 2.

[108] K i r i l l o v A. A., Cours sur la théorie des représentations des groupes, IV (représentation des groupes et mécanique). Ed. Univ. Mosc. (1971).

[109] K o s t a n t B., Orbits, symplectic structures and representation theory, Proc. of US-Japan Seminar on Differential Geometry (Kyoto, 1965), Tokyo, 1966.

[110] K o s t a n t B., Quantisation and unitary representations. Part I. Prequantizations, Springer Lecture Notes 170 (1970), 87-208.

[111] K r e i n S. G., C h i h v a t o v A. M., Equations différentielles linéaires sur un groupe de Lie, Funct. Analis 4, 1 (1970), 52-61.

[112] L a n g l a n d s R. P., Dimensions of spaces of automorphic forms, Algebraic groups and discontinuous subgroups, Providence (1966).

[113] M a c k e y G. W., Imprimitivity for representations of locally compact groups, I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 35, 9 (1949).

[114] M a c k e y G. W., Unitary representations of group extentions. I, Acta Math. 99, 3-4 (1958), 265-311.

[115] M a c k e y G. W., Infinite dimentional representations of groups, Math. 6, 6 (1962), 57-103.

[116] M a u t n e r F. I., Unitary representations of locally compact groups, I, II, Ann. Math. 51 (1950), 1-25 et 52 (1950).

[117] M a u t n e r F. I., Note on the Fourier inversion formula on groups, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 371-384.

[118] M o o r e C. C., On the Frobenius reciprocity theorem for locally compact groups. Pacific. J. Math. 12, 1 (1962), 359-365.

[119] M o o r e C. C., Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups. I, II. Trans. Amer. Nath. Soc. 113, 1 (1964), 40-86.

[120] N a i m a r k M. A., Sur la description de toutes les représentations unitaires des groupes complexes classiques. Mathem. Sb. 35 (1954), 317-356 et 37 (1955).

[121] N a r a s i m h a n M. S., O k a m o t o K., An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type, Ann. Math. 91, n° 3 (1970), 486-511.

[122] N e u m a n n J., von, Collected works, III. Or rings of operators, Princeton (1960).

[123] N e l s o n E., Analytic Vectors.

[124] O l c h a n s k i G. I., Sur le théorème de dualité de Frobenius, Funct. Analis, 3, 4 (1969), 49-58.

[125] P a r t h a s a r a t h y R., Dirac operators and the discrete series, Preprint.

[126] P u k a n s z k y L., On the unitary representations of exponential groups, Journ. Funct. Anal. 2 (1968), 73-113.

[127] P u k a n s z k y L., Characters of algebraic solvable groups, Journ. Funct. Anal. 3 (1969), 435-494.

[128] S c h m i d W., Homogeneous complex manifolds and representations of semisimples Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 69, n° 1 (1968), 56-59.

[129] S e g a l I. E., An extension of Plancherel's formula for separable unimodular locally compact groups, Ann. Math. 52 (1950).

[130] Smorodinsky Y. A., Symétrie unitaire des particules élémentaires. Uspechi Phys. Naouk, 84, 1 (1964), 3-28.

[131] Stein E. M., Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(n, \mathbf{C})$ Ann. Math., 86 (1967), 461-495.

[132] Steinberg R. A. A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1951), 274-282.

[133] Takenouchi O., Sur le facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (*E*). Math. Journ. Okayama Univ. **7**, n° 2 (1957), 151-161.

[134] Takesaki M., Group algebras and duality, Bull. Amer. Math. Soc., 77, 4 (1971), 553-557.

[135] Thoma E., Eine Charakterisierung diskreter Gruppen vom Typ. I, Inventiones Math., **6** (1968), 190-196.

[136] Wigner E. P., On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz Group., Ann. Math. **40** (1939), 149-204.

INDEX TERMINOLOGIQUE

TABLE DES MATIÈRES